令和６年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5

1 A，B，C，D，E の 5 人が，それぞれゲーム α とゲーム β の 2 種類のゲームを行った．ゲーム α の得点を x，ゲーム β の得点を y で表す．下の表はそれぞれのゲームにおける得点である．ただし，a，b は整数である．なお，得点が負になることもあり得る．

	A	B	C	D	E
得点 x	7	6	8	a	4
得点 y	0	-4	-1	2	b

ゲーム α の得点 x の平均値は 7 であるとし，ゲーム β の得点 y の平均値を m とする．次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) p，q は実数で，$p \neq 0$ とする．ゲーム β の得点 y を $z = py + q$ により変換し，新たな変量 z を作成する．z の分散を ${s_z}^2$，二つの変量 x，z の共分散を s_{xz} とする．このとき，${s_z}^2$ と s_{xz} を p，q，m のうちの必要なものを用いて表せ．ただし，変量 x と z の共分散は x の偏差と z の偏差の積の平均値である．

(3) 変量 x と (2) で作った変量 z の相関係数が $\dfrac{3}{4}$ であるとき，m と b の値を求めよ．また，p が正であるか負であるかを答えよ．

2 座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0)，A(1, 1, 0)，B(0, 1, 1)，C(1, 2, -1) に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．

(2) 点 O，A，B を通る平面を α とする．点 C から平面 α に下した垂線と平面 α の交点を M とする．点 M の座標を求めよ．

(3) 点 M を (2) で定めた点とする．点 D を直線 CM 上の点であって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$$

となるものとする．ただし，点 D は点 C とは異なる点である．このとき，点 D の座標を求めよ．

(4) 点 D を (3) で定めた点とする．三角形 CAD の面積 S を求めよ．

3 x 座標，y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点と呼ぶことにする．座標平面上の 3 点を頂点にもつ三角形上の格子点とは，頂点，辺または内部に含まれている格子点のことをいう．四角形に対しても同様に四角形上の格子点を定めるものとする．

$\mathrm{O}(0,\ 0)$ を座標平面の頂点とする．a と b を互いに素な自然数，n を自然数として，座標平面上の点 $\mathrm{P}_n(an,\ 0)$，$\mathrm{Q}_n(0,\ bn)$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) 直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 上の格子点 $(x,\ y)$ で $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ を満たすものは

$$(ak,\ b(n-k)) \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

のみであることを示せ．

(2) P_1 と Q_1 をそれぞれ P，Q と表す．点 $\mathrm{R}(a,\ b)$ に対し，長方形 OPRQ 上の格子点の個数を a と b を用いて表せ．また，三角形 OPQ 上の格子点の個数を a と b を用いて表せ．

(3) 三角形 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$ 上の格子点の個数を a，b，n を用いて表せ．

(4) 座標空間内の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ と 3 点 $\mathrm{X}(an,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Y}(0,\ bn,\ 0)$，$\mathrm{Z}(0,\ 0,\ n)$ をとる．点 O，X，Y，Z を 4 頂点とする四面体 OXYZ 上の格子点の個数を a，b，n を用いて表せ．ただし，x 座標，y 座標，z 座標のすべてが整数である座標空間内の点を格子点と呼ぶことにする．また，四面体上の格子点とは，頂点，辺，面または内部に含まれている格子点のことをいう．

4 複素数平面において，点 1 を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を C とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 α が円 C と虚軸との交点であるとき，$\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ を求めよ．

(2) 円 C 上の点 z に対し，点 $-\dfrac{1}{z}$ も円 C 上にあることを示せ．

(3) 円 C の点 z に対し，$w = z + \dfrac{1}{z}$ とする．複素数 w，z は

$$|w-2| = \frac{2}{|z|}$$

を満たすことを示せ．

(4) 円 C 上の点 z に対し，(3) で定めた複素数 w は

$$|w-2||w+2| = 4$$

を満たすことを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 関数 $f(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ に対し，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=f(x)$ は $x>0$ で上に凸であることを示せ．

(2) すべての $x \geqq 0$ に対し，不等式 $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leqq f(x) \leqq x$ が成り立つことを示せ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} f(x)\,dx$ の値 S を求めよ．

(4) 曲線 $y=f(x)$ 上の点で，x 座標が $\dfrac{3}{4}$ であるものを A とする．また，点 A における曲線 $y=f(x)$ の接線を ℓ とする．ℓ と直線 $y=x$ の交点を B とする．点 O$(0,\ 0)$，A，B と点 C$\left(\dfrac{3}{4},\ 0\right)$ を頂点にもつ四角形 ABOC の面積 T を求めよ．

(5) (1)～(4) を利用して，$\log 2$ の小数第 1 位の数字を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 得点 x の平均が 7 であるから

$$\frac{7+6+8+a+4}{5}=7 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=10}$$

(2) 得点 y の平均値が m であるから

$$\frac{0+(-4)+(-1)+2+b}{5}=m \quad \text{ゆえに} \quad b=5m+3 \quad \cdots ①$$

したがって，得点 y の分散 ${s_y}^2$ は

$$\begin{aligned}{s_y}^2&=\frac{0^2+(-4)^2+(-1)^2+2^2+(5m+3)^2}{5}-m^2\\&=4m^2+6m+6\end{aligned}$$

$z=py+q$ より　${s_z}^2=p^2{s_y}^2=\boldsymbol{p^2(4m^2+6m+6)}$

x と y の共分散 s_{xy} は

$$\begin{aligned}s_{xy}&=\frac{7{\cdot}0+6{\cdot}(-4)+8{\cdot}(-1)+10{\cdot}2+4{\cdot}(5m+3)}{5}-7{\cdot}m\\&=-3m\end{aligned}$$

$z=py+q$ より　$s_{xz}=ps_{xy}=p{\cdot}(-3m)=\boldsymbol{-3pm}$

(3) 得点 x の分散 ${s_x}^2$ は

$$\frac{(7-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(10-7)^2+(4-7)^2}{5}={s_x}^2=4$$

$s_x=2$，$s_z=|p|\sqrt{4m^2+6m+6}$，$\dfrac{s_{xz}}{s_xs_z}=\dfrac{3}{4}$ より

$$\frac{-3pm}{2{\cdot}|p|\sqrt{4m^2+6m+6}}=\frac{3}{4} \qquad (*)$$

上式の辺々を平方することにより

$$\frac{9m^2}{4(4m^2+6m+6)}=\frac{9}{16} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{m=-1} \quad \cdots ②$$

これを $(*)$ に代入して整理すると　$\dfrac{p}{|p|}=1$　ゆえに　$\boldsymbol{p>0}$

② を ① に代入すると　$b=3{\cdot}(-1)+5=\mathbf{2}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\vec{a}=(1,1,0),\ \vec{b}=(0,\ 1,\ 1),\ \vec{c}=(1,2,-1)$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot0+1\cdot1+0\cdot1=\mathbf{1}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{c}=1\cdot1+1\cdot2+0\cdot(-1)=\mathbf{3}$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=0\cdot1+1\cdot2+1\cdot(-1)=\mathbf{1}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,-1,\ 1)$ より，平面 α 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$ より，平面 α の方程式は

$$x-y+z=0$$

点 $\mathrm{C}(1,\ 2,-1)$ を通り，方向ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の直線の方程式は

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}=t\quad(t\text{ は媒介変数})$$

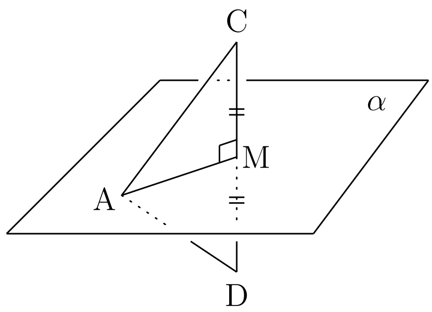
これから　$x=t+1,\quad y=-t+2,\quad z=t-1\quad\cdots(*)$

$(*)$ を平面 α の方程式に代入すると

$$(t+1)-(-t+2)+(t-1)=0\quad\text{ゆえに}\quad t=\frac{2}{3}$$

これを $(*)$ に代入して　$x=\dfrac{5}{3},\ y=\dfrac{4}{3},\ z=-\dfrac{1}{3}$　よって　$\mathbf{M}\left(\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}},-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$

(3) 条件から，M は CD の中点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=2\left(\frac{5}{3},\ \frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)-(1,\ 2,-1)\\&=\left(\frac{7}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{D}\left(\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{CD}}=\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$ より

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}||\overrightarrow{\mathrm{AM}}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{6}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{2}}$$

■

$\boxed{3}$ (1) 2点 $\mathrm{P}_n(an,\ 0)$，$\mathrm{Q}_n(0,\ bn)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x}{an}+\frac{y}{bn}=1 \quad \text{ゆえに} \quad bx+ay=abn$$

$x,\ y$ は整数であるから，上の第2式から　$bx\equiv 0 \pmod{a}$
a と b は互いに素であるから，整数 k を用いて　$x=ak$　$\cdots$①
① を直線の方程式に代入すると

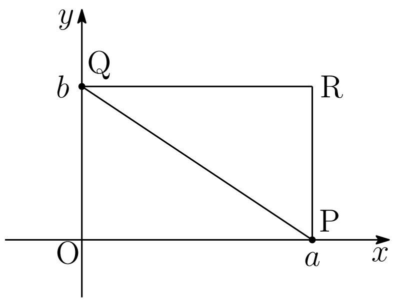
$$abk+ay=abn \quad \text{ゆえに} \quad y=b(n-k) \quad \cdots ②$$

①，② において，$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ であるから，条件を満たす格子点は

$$(ak,\ b(n-k)) \qquad (k=0, 1, \cdots, n)$$

(2) 四角形 OPRQ 上の格子点の個数は　$\boldsymbol{(a+1)(b+1)}$
三角形 OPQ 上と三角形 RPQ 上の格子点の個数 S は等しく，格子点 $(a,\ 0)$ および $(0,\ b)$ の2個を共有しているから

$$S+S-2=(a+1)(b+1) \quad \text{ゆえに} \quad S=\boldsymbol{\frac{ab+a+b+3}{2}}$$



(3) $\mathrm{R}_n(an,\ b_n)$ とすると，四角形 $\mathrm{OP}_n\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_n$ 上の格子点の個数は

$$(an+1)(bn+1)$$

三角形 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$ 上と三角形 $\mathrm{R}_n\mathrm{P}_n\mathrm{Q}n$ 上の格子点の個数 S_n は等しく，(1) で示した格子点 $n+1$ 個を共有しているから

$$S_n+S_n-(n+1)=(an+1)(bn+1)$$

したがって　　$S_n=\boldsymbol{\dfrac{abn^2+(a+b+1)n+2}{2}}$

(4) 4 点 O(0, 0, 0)，X(an, 0, 0)，Y(0, bn, 0)，Z(0, 0, n) を頂点とする四面体 OXYZ の境界および内部を含む領域は

$$\frac{x}{an}+\frac{y}{bn}+\frac{z}{n}\leqq 1,\quad x\geqq 0,\quad y\geqq 0,\quad z\geqq 0$$

上の領域と平面 $z=k$ の共有部分は $(k=0,1,\cdots,n)$

$$bx+ay=ab(n-k),\quad x\geqq 0,\quad y\geqq 0$$

求める格子点の個数は，(3) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}S_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}S_k&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\{abk^2+(a+b+1)k+2\}\\&=\frac{1}{2}\left\{ab\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}(a+b+1)n(n+1)+2(n+1)\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{12}(n+1)\{abn(2n+1)+3(a+b+1)n+12\}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 点 α は円 $C : |z-1| = \sqrt{2}$ の点であるから

$$|\alpha - 1|^2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha\overline{\alpha} - (\alpha + \overline{\alpha}) = 1$$

このとき，α は虚軸上の点であるから，$\alpha + \overline{\alpha} = 0$ より

$$\alpha\overline{\alpha} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$$

したがって　$\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \alpha + \overline{\alpha} = \mathbf{0}$

別解 円 $(x-1)^2 + y^2 = 2$ と y 軸との交点は $(0,\ \pm 1)$ であるから，$\alpha = \pm i$ より

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \mathbf{0}$$

(2) $\mu = -\dfrac{1}{z}$ とおくと，$\mu z = -1$ であるから，$|z-1| = \sqrt{2}$ より

$$|\mu||z-1| = \sqrt{2}|\mu| \quad \text{ゆえに} \quad |\mu z - \mu| = \sqrt{2}|\mu|$$

したがって　$|-1-\mu| = \sqrt{2}|\mu|$　ゆえに　$\sqrt{2}|\mu| = |\mu + 1|$

$$2\mu\overline{\mu} = \mu\overline{\mu} + \mu + \overline{\mu} + 1 \quad \text{ゆえに} \quad \mu\overline{\mu} - \mu - \overline{\mu} + 1 = 2$$

すなわち　$|\mu - 1| = \sqrt{2}$　よって　点 $-\dfrac{1}{z}$ は C 上の点である．

(3) $w = z + \dfrac{1}{z}$ より　$w - 2 = \dfrac{(z-1)^2}{z}$

z は C 上の点であるから　$|w-2| = \dfrac{|z-1|^2}{|z|} = \dfrac{2}{|z|}$

(4) C 上の点 z に対し，$|z-1|^2 = 2$ より　$|z|^2 = z + \overline{z} + 1$　$\cdots(*)$

$w = z + \dfrac{1}{z}$ より　$w + 2 = \dfrac{(z+1)^2}{z}$

$(*)$ より　$|w+2| = \dfrac{|z+1|^2}{|z|} = \dfrac{|z|^2 + z + \overline{z} + 1}{|z|} = \dfrac{2|z|^2}{|z|} = 2|z|$

上式および (3) の結果から

$$|w-2||w+2| = \frac{2}{|z|} \cdot 2|z| = 4$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ より

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad f''(x)=-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$x>0$ で，$f''(x)<0$ より，$x>0$ で $y=f(x)$ は上に凸である．

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$t\geqq 0$ のとき，$\dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\leqq\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\leqq 1$ より

$$\int_0^x\frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\leqq\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\leqq\int_0^x dt\quad(x\geqq 0)$$

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$f(0)=0$ であるから

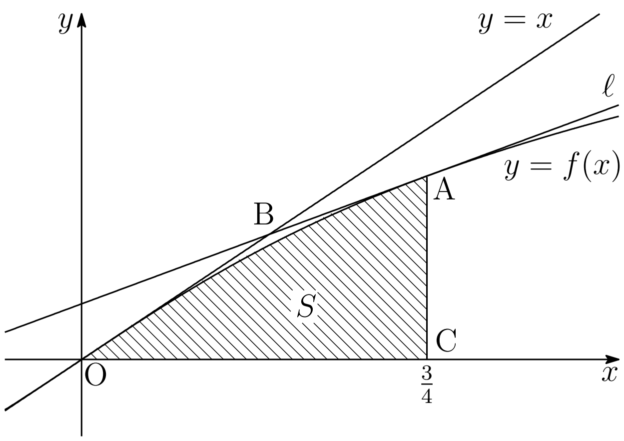
$$x\geqq 0\ \text{のとき}\quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\leqq f(x)\leqq x$$

(3) $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$，$xf'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=(\sqrt{1+x^2})'$ より

$$f(x)=\left\{xf(x)-\sqrt{1+x^2}\right\}'$$

$f(0)=0$，$f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\log 2$ であるから

$$S=\int_0^{\frac{3}{4}}f(x)\,dx=\left[\,xf(x)-\sqrt{1+x^2}\,\right]_0^{\frac{3}{4}}=\mathbf{\frac{3}{4}\log 2-\frac{1}{4}}$$



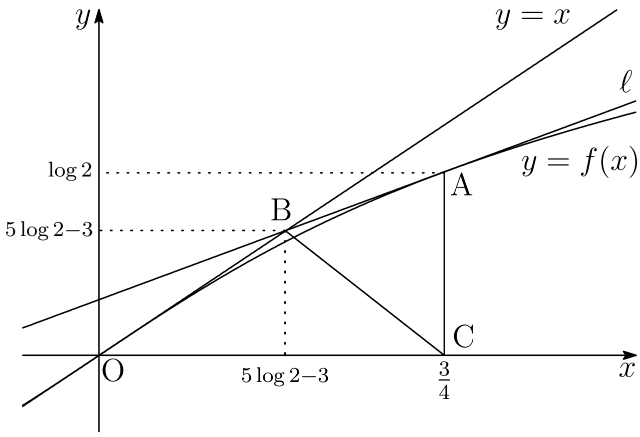
(4) $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\log 2$，$f'\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{4}{5}$ より，ℓ の方程式は

$$y-\log 2=\frac{4}{5}\left(x-\frac{3}{4}\right)\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{4}{5}x+\log 2-\frac{3}{5}$$

ℓ と直線 $y=x$ の交点 B は　$(5\log 2-3,\ 5\log 2-3)$

したがって，四角形 ABOC の面積 T は

$$\begin{aligned} T &= \triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{ABC} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(5\log 2-3)+\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{4}-(5\log 2-3)\right\}\log 2 \\ &= \boldsymbol{-\frac{5}{2}(\log 2)^2+\frac{15}{4}\log 2-\frac{9}{8}} \end{aligned}$$



(5) (2) の結論に $x=\dfrac{3}{4}$ を代入すると　$\dfrac{3}{5}\leqq\log 2\leqq\dfrac{3}{4}$　$\cdots$①

$S<T$ であるから，これに (3)，(4) の結果を代入すると

$$\frac{3}{4}\log 2-\frac{1}{4}<-\frac{5}{2}(\log 2)^2+\frac{15}{4}\log 2-\frac{9}{8}$$

整理すると　　$20(\log 2)^2-24\log 2+7<0$

$$(2\log 2-1)(10\log 2-7)<0\quad \text{ゆえに}\quad \frac{1}{2}<\log 2<\frac{7}{10}\quad\cdots②$$

①，② より　$\dfrac{3}{5}\leqq\log 2<\dfrac{7}{10}$

よって，$\log 2$ の小数第 1 位の数字は　**6**