令和５年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・総合学科 (理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5

1 箱の中に 1 から N までの番号が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている．ただし，N は 4 以上の自然数である．「この箱からカードを 1 枚取り出し，書かれた番号を見てもとに戻す」という試行を考える．この試行を 4 回繰り返し，カードに書かれた番号を順に X，Y，Z，W とする．次の問いに答えよ．

(1) $X=Y=Z=W$ となる確率を求めよ．

(2) X，Y，Z，W が四つの異なる番号からなる確率を求めよ．

(3) X，Y，Z，W のうち三つが同じ番号で残り一つが他と異なる番号である確率を求めよ．

(4) X，Y，Z，W が三つの異なる番号からなる確率を求めよ．

2 原点を O とする座標平面上の 2 点 A(3, 0)，B(1, 1) を考える．α，β を実数とし，点 P$(\alpha,\ \beta)$ は直線 OA 上にも直線 OB 上にもないとする．直線 OA に関して点 P と対称な点を Q とし，直線 OB に関して点 P と対称な点を R とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 Q および点 R の座標を，α，β を用いて表せ．

(2) 直線 OA と直線 QR が交点 S をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ．さらに，このときの交点 S の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ．

(3) 直線 OB と直線 QR が交点 T をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ．さらに，このときの交点 T の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ．

(4) α，β は (2) と (3) の両方の条件を満たすとし，S，T は (2)，(3) で定めた点であるとする．このとき，直線 OA と直線 BS が垂直となり，直線 OB と直線 AT が垂直となる α，β の値を求めよ．

3 空間内の 6 点 A，B，C，D，E，F は 1 辺の長さが 1 の正八面体の頂点であり，四角形 ABCD は正方形であるとする．$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{d}$，$\vec{b}\cdot\vec{e}$，$\vec{d}\cdot\vec{e}$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=p\vec{b}+q\vec{d}+r\vec{e}$ を満たす実数 p，q，r の値を求めよ．

(3) 辺 BE を $1:2$ に内分する点を G とする．また，$0<t<1$ を満たす実数 t に対し，辺 CF を $t:(1-t)$ に内分する点を H とする．t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$\triangle$AGH の面積が最小となる t の値とそのときの $\triangle$AGH の面積を求めよ．

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=\left(\frac{n^6(n+1)}{{a_n}^3}\right)^2\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

により定める．また

$$b_n=\log_2\frac{a_n}{n^2}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

とおく．次の問いに答えよ．必要ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\log_2 n}{6^{2n}}=0$ であることを用いてよい．

(1) b_1，b_2 を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k=0$ であることを示せ．

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_{2k}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 関数 $f(x)=\log\dfrac{3x+3}{x^2+3}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい．

(2) s を定数とするとき，次の x についての方程式 $(*)$ の異なる実数解の個数を調べよ．

$$(*)\qquad f(x)=s$$

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3}\,dx$ の値を求めよ．

(4) (2) の $(*)$ が実数解をもつ s に対して，(2) の $(*)$ の実数解のうち最大のものから最小のものを引いた差を $g(s)$ とする．ただし，(2) の $(*)$ の実数解が一つだけであるときには $g(s)=0$ とする．関数 $f(x)$ の最大値を α とおくとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{\alpha} g(s)\,ds$ の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 1種類の数だけが取り出される確率であるから

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_1}{N^4} = \boldsymbol{\frac{1}{N^3}}$$

(2) 4種類の数が取り出される確率であるから

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_4{\cdot}4!}{N^4} = \boldsymbol{\frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{N^3}}$$

(3) $\{A,\ A,\ A,\ B\}$ のとなる $A,\ B$ の選び方は ${}_N\mathrm{P}_2$ 通りあり，これらが取り出される順序は4通りあるから，求める確率は

$$\frac{{}_N\mathrm{P}_2{\cdot}4}{N^4} = \boldsymbol{\frac{4(N-1)}{N^3}}$$

(4) 3種類の数が取り出される確率であるから

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_3\{3^4 - {}_3\mathrm{C}_2(2^4-2) - {}_3\mathrm{C}_1\}}{N^4} = \boldsymbol{\frac{6(N-1)(N-2)}{N^3}}$$

補足 2種類の数が取り出される確率は[1]

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_2(2^4-2)}{N^4} = \boldsymbol{\frac{7(N-1)}{N^3}}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2013.pdf $\boxed{1}$ (2)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 2 点 Q，R は点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ とそれぞれ，x 軸，直線 $y=x$ に関して対称より

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}, -\boldsymbol{\beta}),\quad \mathbf{R}(\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\alpha})$$

(2) $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ は直線 $y=x$ 上にないから　$\beta-\alpha\neq 0$

したがって，2 点 $\mathrm{Q}(\alpha, -\beta)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \alpha)$ を通る直線の方程式は

$$y+\beta=\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\quad ゆえに\quad y=\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}x-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta-\alpha}\qquad\cdots①$$

点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ は x 軸上の点ではないから　$\beta\neq 0$　$\cdots$②

$-(\alpha^2+\beta^2)\neq 0$ となるから，$\alpha+\beta=0$ のとき，① は　$y=-\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta-\alpha}$

このとき，$-\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta-\alpha}\neq 0$ とない，直線 QR は x 軸と共有点をもたない．

直線 QR が x 軸と共有点をもつための条件は

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\neq \mathbf{0}$$

このとき，① と直線 $y=0$ を連立して　$\mathbf{S}\left(\dfrac{\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2}{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}},\ \mathbf{0}\right)$

(3) ② から，直線 OB と直線 QR が一致することはないから，直線 OB と直線 QR が交点を持つための条件は

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\neq 1\quad すなわち\quad \boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$$

このとき，① と直線 $y=x$ を連立して　$\mathbf{T}\left(\dfrac{\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2}{\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}},\ \dfrac{\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2}{\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}}\right)$

(4) (2)，(3) で示した条件は

$$\alpha\neq 0,\quad \beta\neq 0,\quad \alpha\neq\beta,\quad \alpha\neq-\beta \qquad (*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{BS}}=\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}-1, -1\right)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BS}}$ より

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}-1=0\quad ゆえに\quad \alpha^2+\beta^2=\alpha+\beta\qquad\cdots③$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}-3,\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\right)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AT}}$ より

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}-3=0\quad ゆえに\quad \alpha^2+\beta^2=3\alpha\qquad\cdots④$$

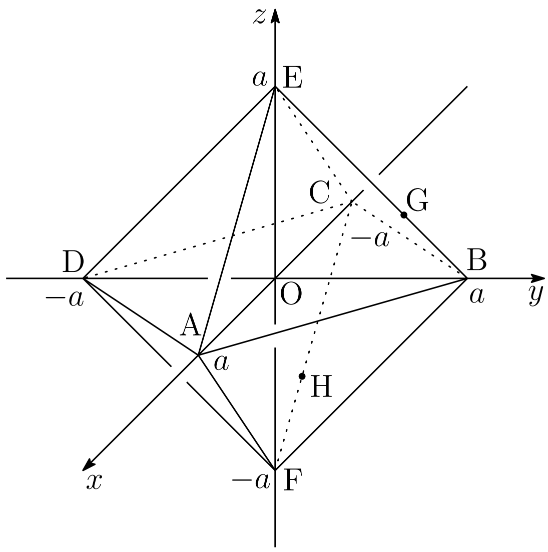
$(*)$ に注意して，③，④ を解くと　$\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}},\ \boldsymbol{\beta}=\dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}$　■

3 (1) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおく．

O を原点とする座標空間に 6 点

$\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ a,\ 0)$,
$\mathrm{C}(-a,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{D}(0, -a,\ 0)$,
$\mathrm{E}(0,\ 0,\ a)$, $\mathrm{F}(0,\ 0, -a)$

をとると



$$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-a,\ a,\ 0),$$
$$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (-a, -a,\ 0),$$
$$\vec{e} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} = (-a,\ 0,\ a)$$

したがって　$\vec{b}\cdot\vec{d} = \mathbf{0}$,　$\vec{b}\cdot\vec{e} = a^2 = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$,　$\vec{d}\cdot\vec{e} = a^2 = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = (-a,\ 0, -a)$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = p\vec{b} + q\vec{d} + r\vec{e}$ より

$$\begin{aligned} (-a,\ 0, -a) &= p(-a,\ a,\ 0) + q(-a, -a,\ 0) + r(-a,\ 0,\ a) \\ a(-1,\ 0, -1) &= a(-p-q-r,\ p-q,\ r) \end{aligned}$$

したがって　$-p-q-r = -1$,　$p-q = 0$,　$r = -1$

これを解いて　$\boldsymbol{p = 1,\ q = 1,\ r = -1}$

(3) G は辺 BE を $1:2$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{2}{3}(0,\ a,\ 0) + \frac{1}{3}(0,\ 0,\ a) = \frac{a}{3}(0,\ 2,\ 1)$$

H は辺 CF を $t : 1-t$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OH}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OF}} = (1-t)(-a,\ 0,\ 0) + t(0,\ 0, -a) \\ &= a(t-1,\ 0, -t) \end{aligned}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AG}} &= \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= \frac{a}{3}(0,\ 2,\ 1) - a(1,\ 0,\ 0) = \frac{a}{3}(-3,\ 2,\ 1) \\
\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= a(t-1,\ 0, -t) - a(1,\ 0,\ 0) = a(t-2,\ 0, -t) \\
|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2 &= \frac{a^2}{9}(9+4+1) = \frac{7}{9} \\
|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 &= a^2\{(t-2)^2 + t^2\} = t^2 - 2t + 2 \\
\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \frac{a^2}{3}\{-3(t-2) + 2\cdot 0 + 1\cdot(-t)\} = \frac{1}{3}(3-2t)
\end{aligned}
$$

$\triangle$AGH の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}})^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{9}(t^2-2t+2) - \frac{1}{9}(3-2t)^2} \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{7(t^2-2t+2) - (3-2t)^2} \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{3t^2-2t+5} \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}}
\end{aligned}
$$

$0 < t < 1$ より，$\boldsymbol{t = \frac{1}{3}}$ のとき，S は最小値 $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{14}{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{42}}{18}}$ をとる． ■

$\boxed{4}$ (1) $a_{n+1} = \left(\dfrac{n^6(n+1)}{{a_n}^3}\right)^2$ より

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} = \left(\frac{n^2}{a_n}\right)^6 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 \frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} = -6\log_2 \frac{a_n}{n^2}$$

$a_1 = 2$，$b_n = \log_2 \dfrac{a_n}{n^2}$ より　$b_1 = \log_2 \dfrac{2}{1^2} = \mathbf{1}$，$b_{n+1} = -6b_n \quad \cdots (*)$

また　$b_2 = -6b_1 = -6{\cdot}1 = \mathbf{-6}$

(2) $(*)$ より，$\{b_n\}$ は公比 -6 の等比数列である．

(3) $0 < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log_2 k = \log_2 n! < \log_2 n^n = n\log_2 n$ より

$$0 < \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \log_2 k < \frac{n\log n}{6^{2n}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{6^{2n}} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \log_2 k = 0$$

(4) $\log_2 a_{2k} = \log_2 \dfrac{a_{2k}}{(2k)^2} + \log_2 (2k)^2 = b_{2k} + 2 + 2\log_2 k$

$(*)$ より　$b_n = 1{\cdot}(-6)^{n-1}$　ゆえに　$b_{2k} = (-6)^{2k-1} = -6{\cdot}6^{2(k-1)}$

求める極限値を I とすると

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \log_2 a_{2k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} (b_{2k} + 2 + 2\log_2 k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \{-6{\cdot}6^{2(k-1)} + 2 + 2\log_2 k\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{-6(6^{2n}-1)}{6^{2n}(6^2-1)} + \frac{2n}{6^{2n}} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\log_2 k}{6^{2n}} \right\} \\
&= -\frac{6}{35} + 0 + 0 = \mathbf{-\frac{6}{35}}
\end{aligned}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $f(x)=\log\dfrac{3x+3}{x^2+3}$ より，$f(x)$ の定義域は

$$\frac{3x+3}{x^2+3}>0 \quad \text{すなわち} \quad x>-1$$

$f(x)$ を微分すると

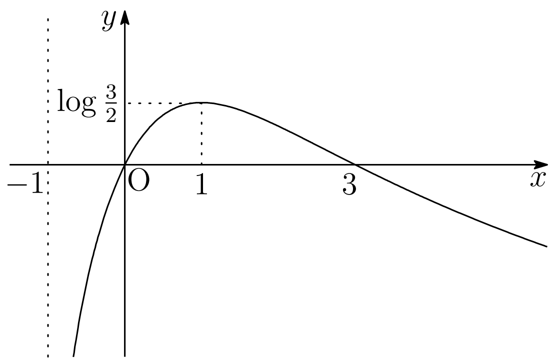
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2+3}{3x+3}\cdot\frac{3(x^2+3)-(3x+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{-x^2-2x+3}{(x+1)(x^2+3)} \qquad \cdots ① \\ &= -\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x^2+3)} \end{aligned}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(-1)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\log\frac{3}{2}$	$\searrow$

また　$\displaystyle\lim_{x\to -1+0} f(x)=-\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\log\frac{\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=-\infty$

よって，$y=f(x)$ の概形は，次のようになる．



(2) $f(x)=s$ の実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=s$ の共有点の個数である．したがって，(1) のグラフから

$$\begin{cases} \boldsymbol{s>\log\frac{3}{2}} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{s=\log\frac{3}{2}} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{s<\log\frac{3}{2}} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \end{cases}$$

(3) $$\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3}\,dx = \int_0^3 \left(2 - \frac{6}{x^2+3}\right) dx = 6 - 6\int_0^3 \frac{1}{x^2+3}\,dx \qquad (*)$$

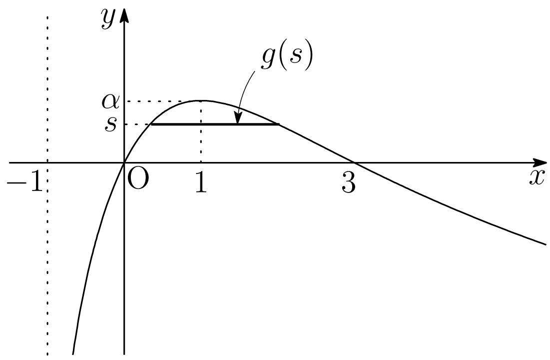
$x = \sqrt{3}\tan\theta$ とおくと $\quad \dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$

x	$0 \longrightarrow 3$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} J = \int_0^3 \frac{1}{x^2+3}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{dx}{d\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$(*)$ より $\quad \displaystyle\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3}\,dx = \boldsymbol{6 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$

(4) 下の図から $\quad \displaystyle\int_0^\alpha g(s)\,ds = \int_0^3 f(x)\,dx$



$f(0) = 0$，$f(3) = 0$ および ① に注意して

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha g(s)\,ds = \int_0^3 f(x)\,dx &= \int_0^3 (x+1)'f(x)\,dx \\ &= \Big[\ (x+1)f(x)\ \Big]_0^3 - \int_0^3 (x+1)f'(x)\,dx \\ &= \int_0^3 \frac{x^2+2x-3}{x^2+3}\,dx \\ &= \int_0^3 \left(1 + \frac{2x}{x^2+3} - \frac{6}{x^2+3}\right) dx \\ &= \Big[\ x + \log(x^2+3)\ \Big]_0^3 - 6J \\ &= 3 + 2\log 2 - 6\cdot\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \boldsymbol{3 + 2\log 2 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}} \end{aligned}$$