令和４年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

$\boxed{1}$ 座標平面上の曲線 $y = x^3 + x^2$ を C とする．また，a を実数とし，L_a を点 $(-1,\ 0)$ を通る傾き a の直線とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) C と L_a がちょうど二つの共有点をもつような a の値をすべて求めよ．

(2) a が (1) の条件を満たすそれぞれの場合について，C と L_a で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) C と L_a がちょうど三つの共有点をもち，さらに C と L_a で囲まれた二つの部分の面積の差の絶対値が $\dfrac{3}{2}$ となるとき，a の値を求めよ．

$\boxed{2}$ a を正の実数，t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円を S とし，その中心が $\mathrm{I}(0,\ t)$ であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\angle\mathrm{IBC}$ を θ とおく．t と a を，それぞれ θ を用いて表せ．

(2) a を t を用いて表せ．

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心が内接円 S の周上にあるとき，t の値を求めよ．

(4) $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心が S の周上にあるとき，t の値を求めよ．ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下した 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られており，その交わる点を三角形の垂心と呼ぶ．

(5) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心が S の周上にあるとき，t のとり得る値をすべて求めよ．

3 $a,\ b$ を整数とする．また，整数の数列 $\{c_n\}$ を $c_1 = a$，$c_2 = b$ および漸化式

$$c_{n+2} = c_{n+1} + c_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a = 39$，$b = 13$ とする．このとき，二つの整数 c_5 と c_6 の最大公約数を求めよ．

(2) a と b はともに奇数であるとする．このとき，自然数 n に対して次の命題 P_n が成り立つことを，n についての数学的帰納法で示せ．

P_n : c_{3n-2} と c_{3n-1} はともに奇数であり，c_{3n} は偶数である．

(3) d を自然数とし，a と b はともに d の倍数であるとする．このとき，自然数 n に対して c_n が d の倍数になることを示せ．ただし，数学的帰納法を用いて証明すること．

(4) c_{2022} が奇数であるならば，$a + b$ も奇数であることを示せ．

$\boxed{4}$ n を自然数とする．袋の中に赤玉が 3 個，白玉が $(n+5)$ 個，合計で $(n+8)$ 個の玉が入っている．また，空箱 A，B，C，D，E，F が用意されている．この準備の下で次の試行 1，試行 2 を順に行う．

試行 1 袋から玉を 1 個取り出して，箱 A に入れる．箱 A に入れた玉が白玉なら $i=0$，赤玉なら $i=1$ とおく．

試行 2 次に，袋から白玉を n 個取り出して，箱 B に入れる．この時点で，袋に残った玉 7 個のうち，赤玉は $(3-i)$ 個，白玉は $(4+i)$ 個である．この 7 個の中から 2 個の玉を取り出して，箱 C に入れる．

試行 2 を終えたら，箱 A と箱 C の玉の色を記録して，箱 A，B，C の玉をすべて元通りに袋に戻す．そして次の試行 3 を行う．

試行 3 袋から玉を 1 個取り出して，箱 D に入れる．次に，袋から玉を n 個取り出して，箱 E に入れる．最後に袋から玉を 2 個取り出して，箱 F に入れる．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $i=0$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_0 を求めよ．また，$i=1$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_1 を求めよ．

(2) 試行 1 において，箱 A に赤玉が入る確率 q_{A} を n を用いて表せ．また，試行 1，試行 2 を順に行うとき，箱 C に赤玉が 2 個入る確率 q_{C} を n を用いて表せ．

(3) 試行 3 において，箱 D に赤玉が入るという事象を事象 X，箱 E に入る玉がすべて白であるという事象を事象 Y，箱 F に赤玉が 2 個入るという事象を事象 Z と呼ぶことにする．事象 X と事象 Y がともに起こる確率 $P(X \cap Y)$ を n を用いて表せ．また，事象 Y と事象 Z がともに起こる確率 $P(Y \cap Z)$ を n を用いて表せ．

(4) (3) の事象 Y が起こったとき，(3) の事象 X が起こる条件付き確率 $P_Y(X)$ と，(3) の事象 Z が起こる条件付き確率 $P_Y(Z)$ をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$ と $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ との大小を比較せよ．

(2) 関数 $f(x)$ を $f(x)=\sqrt{2}^{\,x}$ と定義し，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする．C 上の点 $(2,\ f(2))$ における接線の方程式を，実数 $m,\ k$ を用いて $y=mx+k$ と表すとき，m と k の値をそれぞれ求めよ．

(3) $f(x)$ および m と k を (2) のように定める．すべての実数 x に対して $f(x) \geqq mx+k$ が成り立つことを示せ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\sqrt{2}$ および漸化式 $a_{n+1}=\sqrt{2}^{\,a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ により定義する．自然数 n に対して

$$2-a_{n+1} \leqq (\log 2)\cdot(2-a_n)$$

が成り立つことを示し，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．必要ならば，自然対数の底が $e=2.718\cdots$ であることを用いてよい．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $C: y=x^3+x^2$ と点 $(-1,\ 0)$ を通り傾き a 直線 $L_a: y=a(x+1)$ の方程式から y を消去すると

$$x^3+x^2=a(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x^2-a)=0 \qquad (*)$$

この方程式が重解もつ次の場合である．

(i) $x^2-a=0$ が重解をもつとき　$a=0$

(ii) $x^2-a=0$ が $x=-1$ を解にもつとき　$a=1$

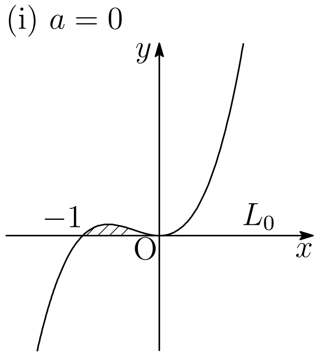
(i)，(ii) から，求める a の値は　$\boldsymbol{a=0,\ 1}$

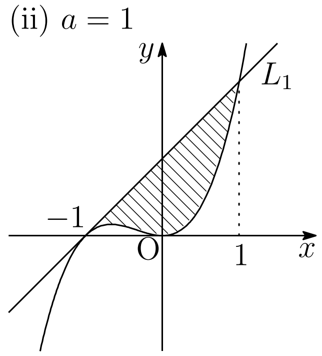
(2) (i) $a=0$ のとき，$(*)$ の解は　$x=-1,\ 0$

$$\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}=\mathbf{\frac{1}{12}}$$

(ii) $a=1$ のとき，$(*)$ の解は　$x=-1,\ 1$

$$\int_{-1}^{1}\{(x+1)-(x^3+x^2)\}\,dx=2\int_{0}^{1}(1-x^2)\,dx=2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}=\mathbf{\frac{4}{3}}$$





補足 積分公式[1] $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\boldsymbol{(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\{(x+1)-(x^3+x^2)\}\,dx&=\int_{-1}^{1}(x+1)^2(1-x)\,dx\\&=\frac{1}{12}\{1-(-1)\}^4=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

---

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

(3) C と L_a がちょうど三つの共有点をもつとき，方程式 $(*)$ は異なる 3 つの実数解をもつから，a の値は次の範囲にある．

(i) $0 < a < 1$ のとき，下の図に示した S_1，S_2 の面積について，(2) の結果から

$$0 < S_1 < \frac{1}{12}, \quad 0 < S_2 < \frac{4}{3} \quad \text{ゆえに} \quad |S_2 - S_1| < \frac{4}{3}$$

このとき，$|S_2 - S_1| \neq \dfrac{3}{2}$ であり，不適．

(ii) $a > 1$ のとき，$f(x) = a(x+1) - (x^3 + x^2)$ とおくと，下の図の二つの部分の面積 T_1，T_2 は

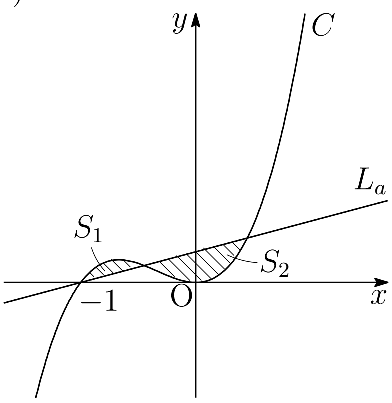
$$T_1 = -\int_{-\sqrt{a}}^{1} f(x)\,dx, \quad T_2 = \int_{1}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx$$

したがって

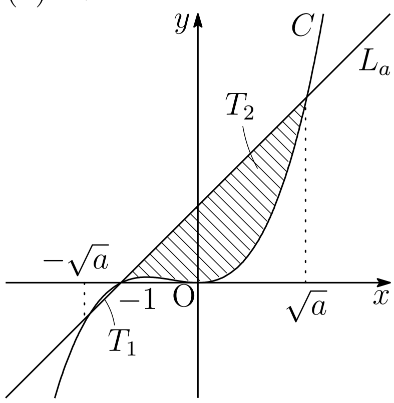
$$\begin{aligned}
T_2 - T_1 &= \int_{1}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx + \int_{-\sqrt{a}}^{1} f(x)\,dx, \\
&= \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\sqrt{a}} (a - x^2)\,dx \\
&= 2\left[\, ax - \frac{x^3}{3} \,\right]_{0}^{\sqrt{a}} = \frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

条件より $\quad \dfrac{4}{3}a^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2} \quad$ ゆえに $\quad a^{\frac{3}{2}} = \dfrac{9}{8} \quad$ よって $\quad \boldsymbol{a = \dfrac{3^{\frac{4}{3}}}{4}}$

i) $0 < a < 1$

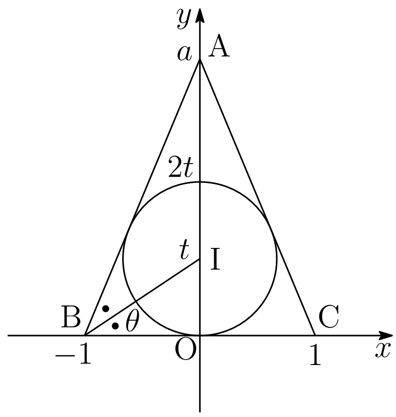


(ii) $a > 1$



$\boxed{2}$ (1) 右の図から

$$\boldsymbol{t = \tan\theta,\quad a = \tan 2\theta}$$



(2) (1) の結果より

$$a = \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \boldsymbol{\frac{2t}{1-t^2}}$$

(3) △ABC の重心の座標は $\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$

これが円周上の点 $(0,\ 2t)$ と一致するから

$$\frac{a}{3} = 2t \quad \text{ゆえに} \quad a = 6t$$

これに (2) の結果を代入すると

$$\frac{2t}{1-t^2} = 6t \quad \text{ゆえに} \quad t(3t^2-2) = 0$$

$0 < t < 1$ に注意して $\boldsymbol{t = \dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

(4) 点 $\mathrm{B}(-1,\ 0)$ を通り，直線 AC に垂直な直線の方程式は

$$y = \frac{1}{a}(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{x}{a} + \frac{1}{a}$$

この直線と y 軸との交点 $\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$ が，$(0,\ 2t)$ と一致するから

$$\frac{1}{a} = 2t$$

これに (2) の結果を代入すると $(0 < t < 1)$

$$\frac{1-t^2}{2t} = 2t \quad \text{ゆえに} \quad 5t^2 = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

(5) AC の垂直二等分線，すなわち，AC の中点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$ を通り，傾き $\dfrac{1}{a}$ の直線の方程式は

$$y-\frac{a}{2}=\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{x}{a}+\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}$$

この直線と y 軸との交点 $\left(0,\ \dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}\right)$ が，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ または $(0,\ 2t)$ に一致するときである．

(i) $\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=0$ のとき $(a>0)$

$$a^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad a=1$$

これに (2) の結果を代入すると $\quad \dfrac{2t}{1-t^2}=1$

$$t^2+2t-1=0 \quad t\,\text{の値の範囲に注意して} \quad t=-1+\sqrt{2}$$

(ii) $\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=2t$ のとき，これに (2) の結果を代入すると

$$\frac{t}{1-t^2}-\frac{1-t^2}{4t}=2t \quad \text{整理すると} \quad 7t^4-2t^2-1=0$$

したがって $\quad t^2=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7} \quad t$ の範囲に注意して $\quad t=\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}}$

(i)，(ii) より $\qquad \boldsymbol{t=-1+\sqrt{2},\ \sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}}}$ ■

3 (1) $c_1 = 39,\ c_2 = 13,\ c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ より

$$c_3 = 52,\quad c_4 = 65,\quad c_5 = 117,\quad c_6 = 182$$

$117 = 13{\cdot}3^2$，$182 = 13{\cdot}2{\cdot}7$ より，c_5 と c_6 の最大公約数は　**13**

補足 n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m\,|\,n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x, y) と表記すると

$$(x, y)\,|\,x,\quad (x, y)\,|\,y$$

が成り立つ．

$c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ より，$(c_{n+1}, c_n)\,|\,c_{n+2}$，また，$(c_{n+1}, c_n)\,|\,c_{n+1}$ であるから，(c_{n+1}, c_n) は，c_{n+2} と c_{n+1} の公約数，したがって

$$(c_{n+1}, c_n)\,|\,(c_{n+2}, c_{n+1}) \tag{A}$$

$c_n = c_{n+2} - c_{n+1}$ より，$(c_{n+2}, c_{n+1})\,|\,c_n$，また，$(c_{n+2}, c_{n+1})\,|\,c_{n+1}$ であるから，(c_{n+2}, c_{n+1}) は，c_{n+1} と c_n の公約数，したがって

$$(c_{n+2}, c_{n+1})\,|\,(c_{n+1}, c_n) \tag{B}$$

(A)，(B) より　$(c_{n+2}, c_{n+1}) = (c_{n+1}, c_n)$　一般に　$(c_{n+1}, c_n) = (c_2,\ c_1)$

(2)　$P_n : c_{3n-2}$ と c_{3n-1} はともに奇数であり，c_{3n} は偶数である．

［1］$n = 1$ のとき，c_1 と c_2 がともに奇数であるから，c_3 は偶数．
よって，P_1 が成立する．

［2］P_k が成立すると仮定すると

c_{3k-1} が奇数，c_{3k} が偶数より　c_{3k+1} は奇数，
c_{3k} が偶数，c_{3k+1} が奇数より　c_{3k+2} は奇数，
c_{3k+1} が奇数，c_{3k+2} が奇数より　c_{3k+3} は偶数

よって，P_{k+1} も成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，P_n が成立する．　(証終)

(3)　$Q_n : c_{2n-1}$ と c_{2n} はともに d の倍数である．

［1］c_1 と c_2 はともに d の倍数であるから，Q_1 は成立する．

［2］Q_k が成立すると仮定すると

$$c_{2k-1} = dx_{2k-1},\quad c_{2k} = dx_{2k}$$

となる整数 x_{2k-1}，x_{2k} が存在するから

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= c_{2k} + c_{2k-1} = d(x_{2k} + x_{2k-1}), \\ c_{2k+2} &= c_{2k+1} + c_{2k} = d(x_{2k} + x_{2k-1}) + dx_{2k} \\ &= d(2x_{2k} + x_{2k-1}) \end{aligned}$$

よって，Q_{k+1} も成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，Q_n が成立する．

よって，a と b がともに d の倍数であるとき，c_n は d の倍数である．

(4) $a+b$ が偶数であるのは，次の場合である．

(i) a と b がともに奇数であるとき，(2) の結論から，$c_{2022} = c_{3\cdot 674}$ は偶数であるから不適．

(ii) a と b がともに偶数 (2 の倍数) であるとき，(3) の結論から，c_{2022} は偶数 (2 の倍数) であるから不適．

(i)，(ii) より，$a+b$ は偶数ではない，すなわち，$a+b$ は奇数である．■

$\boxed{4}$ (1) 条件付き確率 p_0 は，赤玉 3 個，白玉 4 個の計 7 個から 2 個取り出し，2 個とも赤玉の確率であるから

$$p_0 = \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{3}{21} = \boldsymbol{\frac{1}{7}}$$

条件付き確率 p_1 は，赤玉 2 個，白玉 5 個の計 7 個から 2 個取り出し，2 個とも赤玉の確率であるから

$$p_1 = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{1}{21}}$$

(2) $q_\mathrm{A} = \boldsymbol{\frac{3}{n+8}}$

箱 A に白玉が入る確率を $\overline{q_\mathrm{A}}$ とすると　$\overline{q_\mathrm{A}} = 1 - q_\mathrm{A} = \dfrac{n+5}{n+8}$

$$\begin{aligned} q_\mathrm{C} &= \overline{q_\mathrm{A}}p_0 + q_\mathrm{A}p_1 \\ &= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{3}{n+8}\cdot\frac{1}{21} = \boldsymbol{\frac{n+6}{7(n+8)}} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} P(X \cap Y) &= \frac{3}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+5}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n} = \frac{3}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+5}\mathrm{C}_5}{{}_{n+7}\mathrm{C}_7} = \frac{3}{n+8}\cdot\frac{(n+5)!}{n!5!}\cdot\frac{n!7!}{(n+7)!} \\ &= \frac{3}{n+8}\cdot\frac{7\cdot6}{(n+7)(n+6)} = \boldsymbol{\frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \cap Y \cap Z) &= \frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)}\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{6}{(n+8)(n+7)(n+6)}, \\ P(\overline{X} \cap Y \cap Z) &= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_4}{{}_{n+7}\mathrm{C}_7}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} \\ &= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{(n+4)!}{n!4!}\cdot\frac{n!7!}{(n+7)!}\cdot\frac{1}{7} = \frac{30}{(n+8)(n+7)(n+6)} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} P(Y \cap Z) &= P(X \cap Y \cap Z) + P(\overline{X} \cap Y \cap Z) \\ &= \frac{6}{(n+8)(n+7)(n+6)} + \frac{30}{(n+8)(n+7)(n+6)} \\ &= \boldsymbol{\frac{36}{(n+8)(n+7)(n+6)}} \end{aligned}$$

(4)

$$
\begin{aligned}
P(\overline{X}\cap Y) &= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n} = \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_4}{{}_{n+7}\mathrm{C}_7} \\
&= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{(n+4)!}{n!4!}\cdot\frac{n!7!}{(n+7)!} = \frac{210}{(n+8)(n+7)(n+6)}
\end{aligned}
$$

上式および (3) の結果から

$$
\begin{aligned}
P(Y) &= P(X\cap Y) + P(\overline{X}\cap Y) \\
&= \frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)} + \frac{210}{(n+8)(n+7)(n+6)} \\
&= \frac{336}{(n+8)(n+7)(n+6)}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
P_Y(X) &= \frac{P(X\cap Y)}{P(Y)} \\
&= \frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)}\cdot\frac{(n+8)(n+7)(n+6)}{336} = \boldsymbol{\frac{3}{8}}, \\
P_Y(Z) &= \frac{P(Y\cap Z)}{P(Y)} \\
&= \frac{36}{(n+8)(n+7)(n+6)}\cdot\frac{(n+8)(n+7)(n+6)}{336} = \boldsymbol{\frac{3}{28}}
\end{aligned}
$$

■

$\boxed{5}$ (1) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^2\right)} > \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$

よって　$\boldsymbol{\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)} < \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}}$

(2) $f(x) = \sqrt{2}^{\,x}$ より　$f'(x) = \sqrt{2}^{\,x}\log\sqrt{2}$

$f(2) = 2,\ f'(2) = 2\log\sqrt{2} = \log 2$ であるから，求める接線の方程式は

$$
y - 2 = (x-2)\log 2 \quad \text{すなわち} \quad y = x\log 2 + 2 - 2\log 2
$$

よって　$\boldsymbol{m = \log 2,\ \ k = 2 - 2\log 2}$

(3) $f'(x)=\sqrt{2}^{\,x}\log\sqrt{2}>0,\ \ f''(x)=\sqrt{2}^{\,x}(\log\sqrt{2})^2>0$
$mx+n=f'(2)(x-2)+f(2)$ より

$$g(x)=f(x)-f'(2)(x-2)-f(2)$$

とおくと　$g(2)=0$

$$g'(x)=f'(x)-f'(2)$$

$f'(x)$ は単調増加であるから，$g(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって，すべての実数 x に対して

$$g(x)\geqq 0\quad よって\quad f(x)\geqq mx+k$$

(4) $\sqrt{2}\leqq x\leqq 2$ のとき，$f(x)$, $f'(x)$ は単調増加である．平均値の定理により

$$\frac{f(2)-f(x)}{2-x}=f'(c)\quad (x<c<2)$$

を満たす c が存在する．$f(2)=2$ および $f'(c)\leqq f'(2)=\log 2$ より

$$\frac{2-f(x)}{2-x}\leqq\log 2 \tag{A}$$

$f(2)=2$ で，$\sqrt{2}\leqq x\leqq 2$ において，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(x)\leqq f(2)\quad ゆえに\quad 0\leqq 2-f(x) \tag{B}$$

(A)，(B) より，$\sqrt{2}\leqq x\leqq 2$ のとき，次式が成立する．

$$0\leqq 2-f(x)\leqq(2-x)\log 2 \tag{$*$}$$

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=\sqrt{2}$ および漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$ で定義されたとき，すべての自然数 n について，次が成立することを数学的帰納法で示す．

$$a_n<a_{n+1}<2 \tag{$**$}$$

［1］ $n=1$ のとき，$a_1=\sqrt{2}$，$a_2=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ について

$$\sqrt{2}<\sqrt{2}^{\sqrt{2}}<\sqrt{2}^{2}\quad ゆえに\quad a_1<a_2<2$$

よって，$n=1$ のとき，$(**)$ が成立する．

［2］ $n=k$ のとき，$(**)$ が成立する，すなわち，$a_k<a_{k+1}<2$ であると仮定すると，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(a_k)<f(a_{k+1})<f(2)\quad ゆえに\quad a_{k+1}<a_{k+2}<2$$

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(**)$ が成立する．(証終)

$(**)$ より，すべての自然数 n について

$$\sqrt{2} \leqq a_n < 2$$

が成立するから，これを $(*)$ に適用すると

$$0 \leqq 2 - a_{n+1} \leqq (2 - a_n)\log 2$$

したがって $$0 \leqq 2 - a_n \leqq (2 - \sqrt{2})(\log 2)^{n-1}$$

$0 < \log 2 < 1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2 - \sqrt{2})(\log 2)^{n-1} = 0$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(2 - a_n) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 2}$$

■