

## 令和3年度 広島大学 2次試験前期日程 (数学問題)150分

理・工・医・歯・薬・教育(自然系・理数系)・

総合学科(理科系)・生物生産

1~4 必答, 5, 6 から1題選択

- 1  $a$  を実数とする. 関数  $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax$  が  $x = a$  で極大値をとるとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $a$  の満たす条件を求めよ.  
 (2) 次の不等式を解け.

$$|x+1| + |x-2| \leq 4$$

- (3)  $x$  が (2) の範囲を動くとき,  $f(x)$  の最大値と最小値を  $a$  を用いて表せ.

- 2 座標平面において, 二つの放物線

$$y = x^2, \quad y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$$

上にそれぞれ点  $A(1, 1)$ , 点  $C(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$  をとる. 次の問いに答えよ.

- (1) 放物線  $y = x^2$  上に点  $A$  と異なる点  $B$  があり,  $\overrightarrow{AB}$  と  $\overrightarrow{CB}$  は垂直であるとする. このとき,  $B$  の座標を求めよ.  
 (2) 放物線  $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$  上に点  $C$  と異なる点  $D$  があり,  $\overrightarrow{AD}$  と  $\overrightarrow{CD}$  は垂直であるとする. このとき,  $D$  の座標を求めよ.  
 (3)  $B, D$  はそれぞれ (1), (2) で定めたものとする. このとき, 四角形  $ABCD$  が正方形であることを示せ.

- 3 1個のさいころを3回投げる. 1回目に出た目の数を  $a$ , 2回目に出た目の数を  $b$ , 3回目に出た目の数を  $c$  とする. また,

$$f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$$

とする. 次の問いに答えよ.

- (1)  $b^2 > 4c$  である確率を求めよ.  
 (2) 2次方程式  $f(x) = 0$  が異なる二つの実数解をもつ確率を求めよ.  
 (3) 2次方程式  $f(x) = 0$  が異なる二つの実数解をもつとき,  $f'(1) = 7$  である条件付き確率を求めよ.  
 (4) 2次方程式  $f(x) = 0$  が異なる二つの実数解をもつとき, 少なくとも一つが正の解である条件付き確率を求めよ.

- 4  $a, b, c$  を実数とし、2次方程式  $x^2 + x - (c - 1) = 0$  が実数解  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) をもつとする。さらに、二つの等式  $a + b = c^2$ ,  $a\alpha + b\beta + c = 0$  が成り立つとき、次の問いに答えよ。

(1)  $\alpha, \beta$  および  $b - a$  を、それぞれ  $c$  を用いて表せ。

以下において、 $a, b, c$  を自然数とする。

(2)  $\sqrt{4c - 3}$  が自然数でないとき、自然数  $a, b, c$  の組を求めよ。

(3) 自然数  $s$  を用いて、 $4c - 3 = s^2$  と表されるとき、 $s$  と  $a$  は等式

$$s^5 - s^4 + 6s^3 + 2s^2 + (9 - 32a)s = -15$$

を満たすことを示せ。

(4) (3) のとき、自然数  $a, b, c$  の組をすべて求めよ。

- 5 座標平面において、曲線  $y = e^x$  上の点  $P(t, e^t)$  における法線を  $l$  とし、 $l$  と  $y$  軸との交点を  $Q$  とする。 $t \neq 0$  のとき、線分  $PQ$  の中点を  $R$  とし、 $t = 0$  のときは  $R(0, 1)$  とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線  $l$  の方程式を求めよ。

(2)  $t$  が実数全体を動くとき、点  $R$  のえがく曲線  $C$  の方程式を求めよ。

(3) (2) の曲線  $C$ ,  $y$  軸, 直線  $y = e^{-2} + e^2$  で囲まれた図形  $F$  の面積を求めよ。

(4) (3) の図形  $F$  を  $x$  軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

- 6 座標平面において、 $O(0, 0)$ ,  $A(4, 0)$ ,  $P(3, 0)$  とする。線分  $OA$  に点  $P$  で接する円  $C$  を内接円とする  $\triangle OAB$  を考える。ただし、円  $C$  の中心は第1象限にあるとする。次の問いに答えよ。

(1)  $OB$  と  $AB$  の差は一定であることを証明せよ。

(2) 円  $C$  の半径を  $r$  とするとき、 $r$  のとる値の範囲を求めよ。

(3)  $r$  が (2) の範囲で変化するとき、点  $B$  の軌跡の方程式を求めよ。また、その概形をかけ。

## 解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax \text{ より}$$

$$f'(x) = -2x^2 + (2a+1)x - a = -(2x-1)(x-a)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \frac{1}{2}, a$$

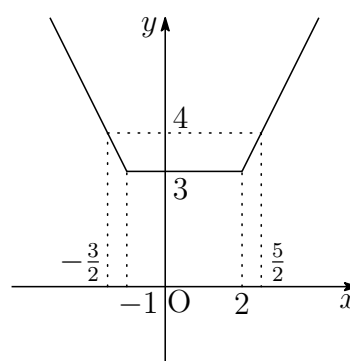
$$x = a \text{ で極大となるから, } f(x) \text{ の増減により } \frac{1}{2} < a$$

$$(2) \quad y = |x+1| + |x-2| \text{ とすると}$$

$$y = \begin{cases} -2x+1 & (x \leq -1) \\ 3 & (-1 \leq x \leq 2) \\ 2x-1 & (2 \leq x) \end{cases}$$

グラフから,  $|x+1| + |x-2| \leq 4$  の解は

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$



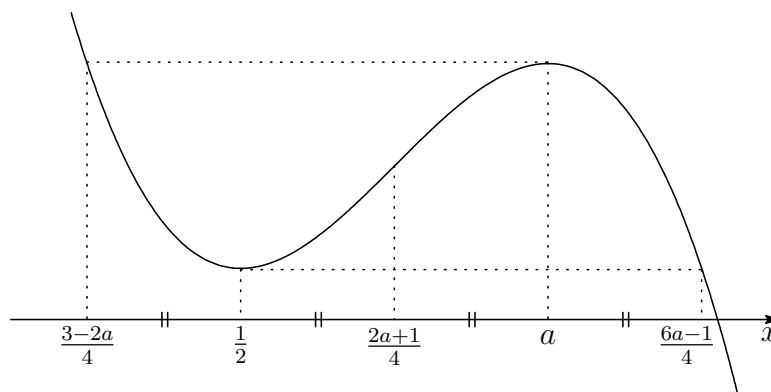
$$(3) \quad x = \frac{1}{2} \text{ は定義域 } -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \text{ の中央であるから, } f(x) \text{ の最大値は}$$

$$\max \left( f\left(-\frac{3}{2}\right), f\left(\frac{5}{2}\right) \right) = \max \left( \frac{15}{4}a + \frac{27}{8}, \frac{15}{4}a - \frac{175}{24} \right) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{24} = f\left(\frac{6a-1}{4}\right) \text{ であるから}$$

$$\frac{5}{2} < \frac{6a-1}{4} \quad \text{すなわち } a > \frac{11}{6} \text{ のとき } \text{最小値 } f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{24}$$

$$\frac{6a-1}{4} \leq \frac{5}{2} \quad \text{すなわち } \frac{1}{2} < a \leq \frac{11}{6} \text{ のとき } \text{最小値 } f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}a - \frac{175}{24}$$



補足  $x = \frac{1}{2}$  で極小,  $x = a$  で極大となるから, その中央  $x = \frac{2a+1}{4}$  が変曲点の  $x$  座標となる. ここで, 等差数列

$$\frac{3-2a}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2a+1}{4}, a, \frac{6a-1}{4}$$

をとると, 次式が成立する<sup>1</sup>.

$$f\left(\frac{3-2a}{4}\right) = f(a), \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{6a-1}{4}\right)$$

$x = \frac{1}{2}$  を極として,  $f(x)$  を展開すると

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \\ &= f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2a-1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

$d > 0$  とし,  $x = \frac{1}{2} - d$ ,  $x = \frac{1}{2} + d$  に対する  $f(x)$  を求めると

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2} - d\right) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2a-1}{2}d^2 + \frac{2}{3}d^3 \\ f\left(\frac{1}{2} + d\right) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2a-1}{2}d^2 - \frac{2}{3}d^3 \end{aligned}$$

上の2式から  $f\left(\frac{1}{2} - d\right) > f\left(\frac{1}{2} + d\right)$

特に,  $d = 2$  とすると  $f\left(-\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right)$

<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TSDai/TSDai\\_2017.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TSDai/TSDai_2017.pdf) (p.6 を参照)

- 2 (1) A(1, 1) と異なる点 B の座標を  $(b, b^2)$  とすると  $(b \neq 1)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b-1 \\ b^2-1 \end{pmatrix} = (b-1) \begin{pmatrix} 1 \\ b+1 \end{pmatrix}$$

また,  $C(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ ,  $B(b, b^2)$  より

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} b-\sqrt{2}+1 \\ b^2-\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB}$  より,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$  であるから

$$\begin{aligned} 1 \cdot (b-\sqrt{2}+1) + (b+1)(b^2-\sqrt{2}-1) &= 0 \\ b^3 + b^2 - \sqrt{2}b - 2\sqrt{2} &= 0 \\ (b-\sqrt{2})\{b^2 + (\sqrt{2}+1)b + 2\} &= 0 \\ (b-\sqrt{2}) \left\{ \left( b + \frac{\sqrt{2}+1}{2} \right)^2 + \frac{5-2\sqrt{2}}{4} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

したがって  $b = \sqrt{2}$  よって  $B(\sqrt{2}, 2)$

- (2) 点  $C(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$  と異なる点 D の座標を  $(d, -\sqrt{2}d^2 + 3d + \sqrt{2})$  とすると  $(d \neq \sqrt{2}-1)$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} d-\sqrt{2}+1 \\ -\sqrt{2}d^2+3d-1 \end{pmatrix} = (d-\sqrt{2}+1) \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}d+\sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

また,  $A(1, 1)$ ,  $D(d, -\sqrt{2}d^2 + 3d + \sqrt{2})$  より

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} d-1 \\ -\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CD}$  より,  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$  であるから

$$\begin{aligned} 1 \cdot (d-1) + (-\sqrt{2}d+\sqrt{2}+1)(-\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2}-1) &= 0 \\ 2d^3 - (2+4\sqrt{2})d^2 + (2+4\sqrt{2})d &= 0 \\ d\{d^2 - (1+2\sqrt{2})d + (1+2\sqrt{2})\} &= 0 \\ d \left\{ \left( d - \frac{1+2\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{4\sqrt{2}-5}{4} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

したがって  $d = 0$  よって  $D(0, \sqrt{2})$

(3) (1), (2) の結果から

$$\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2} - 1, 1), \quad \overrightarrow{AD} = (-1, \sqrt{2} - 1)$$

$\overrightarrow{AD}$  は  $\overrightarrow{AB}$  を  $\frac{\pi}{2}$  だけ回転したもので、すなわち、点 B を点 A を中心に  $\frac{\pi}{2}$  だけ回転させたものが D である。また  $\overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{2} - 1)$  より

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

よって、四角形 ABCD は正方形である。

補足 放物線  $C: y = f(x)$  上の 2 点  $A(\alpha, f(\alpha))$ ,  $B(\beta, f(\beta))$  を通る直線は  $C$  上の  $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$  における接線と平行である。

$f(x) = ax^2 + bx + c$  とすると

$$f'(x) = 2ax + b$$

であるから

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

本題の放物線について、 $f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$  とすると

$$f'(x) = -2\sqrt{2}x + 3$$

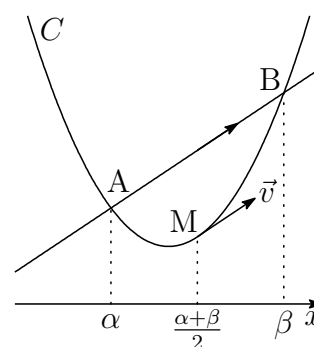
2 点  $C(\sqrt{2} - 1, f(\sqrt{2} - 1))$ ,  $D(d, f(d))$  を通る直線の傾きは

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\sqrt{2} - 1 + d}{2}\right) &= -2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1 + d}{2} + 3 \\ &= -\sqrt{2}d + \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

**3** (1)  $b^2 > 4c$  より  $c < \frac{1}{4}b^2$  これを満たす  $(b, c)$  の組は、次の 17 組

- $b = 1, 2$  のとき  $c$  はなし
- $b = 3$  のとき  $c = 1, 2$
- $b = 4$  のとき  $c = 1, 2, 3$
- $b = 5, 6$  のとき  $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

よって、求める確率は  $\frac{17}{6^2} = \frac{17}{36}$



(2) (i)  $a = 1, 3, 5$  のとき,  $f(x) = -x^2 + bx + c$  であるから, 係数について

$$D = b^2 + 4c > 0$$

このとき, つねに異なる 2 つの実数解をもつ.

(ii)  $a = 2, 4, 6$  のとき,  $f(x) = x^2 + bx + c$  であるから,  $f(x) = 0$  が異なる二つの実数解をもつ条件は

$$b^2 - 4c > 0 \quad \text{すなわち} \quad b^2 > 4c$$

よって, 求める確率は, (i),(ii) および (1) の結果から

$$\frac{3}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{17}{36} = \frac{53}{72}$$

(3) まず, 2 つの事象を次のように定める.

$A$ : 「2 次方程式  $f(x) = 0$  が異なる二つの実数解をもつ」

$B$ : 「 $f'(1) = 7$  である」

(2) の結果から  $P(A) = \frac{53}{72}$

$f'(x) = 2(-1)^a x + b$  より,  $f'(1) = 7$  のとき

$$2(-1)^a + b = 7$$

これを満たす  $(a, b)$  は, 次の 3 組

$$(a, b) = (2, 5), (4, 5), (6, 5)$$

(ii) より  $B \implies A$  ゆえに  $P(B) = P(A \cap B) = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$

よって, 求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{53}{72}} = \frac{6}{53}$$

(4)  $a = 2, 4, 6$  のとき,  $x > 0$  に対し,  $f(x) = x^2 + bx + c > 0$  であるから, このとき, 方程式  $f(x) = 0$  は正の解をもたない.

$a = 1, 3, 5$  のとき, (i) より,  $f(x) = 0$  は, 異なる二つの実数解をもち, それらを  $\alpha, \beta$  とすると, 解との係数の関係により

$$\alpha\beta = -c < 0$$

このとき, 少なくとも一つの正の解をもつ.

「 $f(x) = 0$  が少なくとも一つの正の解をもつ」事象を  $C$  とすると

$$P(A \cap C) = \frac{3}{6} \times 0 + \frac{3}{6} \times 1 = \frac{1}{2}$$

よって, 求める条件付き確率は

$$P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{53}{72}} = \frac{36}{53}$$

**4** (1)  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) は, 2次方程式  $x^2 + x - (c-1) = 0$  の解であるから

$$\alpha = \frac{-1 - \sqrt{4c-3}}{2}, \quad \beta = \frac{-1 + \sqrt{4c-3}}{2}$$

$a + b = c^2 \cdots \textcircled{1}$ ,  $a\alpha + b\beta + c = 0$  より,  $\beta - \alpha \neq 0$  に注意して

$$a = \frac{c}{\beta - \alpha}(c\beta + 1), \quad b = \frac{c}{\beta - \alpha}(-c\alpha - 1) \quad (*)$$

上の2式および  $\alpha + \beta = -1$  から

$$b - a = \frac{c}{\beta - \alpha} \{-c(\alpha + \beta) - 2\} = \frac{c}{\sqrt{4c-3}}(c-2) \quad (**)$$



(2)  $\sqrt{4c-3}$  が自然数でない有理数であると仮定すると,

$$\sqrt{4c-3} = \frac{p}{q}$$

とする ( $p, q$  は互いに素である整数,  $q \neq 1$ ). この両辺を平方すると

$$4c-3 = \frac{p^2}{q^2}$$

$c$  は自然数より, 左辺は自然数であるから,  $q=1$  となり矛盾.

したがって,  $\sqrt{4c-3}$  は無理数である. (1) の結果から

$$(b-a)\sqrt{4c-3} = c(c-2)$$

$b-a \neq 0$  と仮定すると,  $a, b$  は自然数であるから, 上式の左辺は無理数, 右辺は有理数となり, 矛盾. したがって,  $b-a=0$  より

$$c(c-2) = 0$$

$c$  は自然数であるから  $c=2$  さらに①より  $a=b=2$

(3) (1) の結果から

$$\beta - \alpha = \sqrt{4c-3} = s \quad \text{さらに} \quad c = \frac{s^2+3}{4} \dots \textcircled{2}, \quad \beta = \frac{-1+s}{2}$$

これらを(\*)の第1式に代入すると

$$a = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2+3}{4} \left( \frac{s^2+3}{4} \cdot \frac{-1+s}{2} + 1 \right)$$

したがって  $32as = (s^2+3)\{(s^2+3)(s-1)+8\}$

これを整理すると  $s^5 - s^4 + 6s^3 + 2s^2 + (9-32a)s = -15$

(4) (3) の結果から

$$s\{s^4 - s^3 + 6s^2 + 2s + (9 - 32a)\} = -15$$

$s$  は自然数であるから,  $s = 1, 3, 5, 15$  の場合について調べればよい.

$$(**) \text{ より } \quad b - a = \frac{c(c-2)}{s} \quad \dots \textcircled{3}$$

(i)  $s = 1$  のとき, ②より  $c = 1$  これらを ①, ③ に代入すると

$$a + b = 1, \quad b - a = -1$$

このとき,  $b = 0$  となり, 条件に反し, 不適

(ii)  $s = 3$  のとき, ②より  $c = 3$  これらを ①, ③ に代入すると

$$a + b = 9, \quad b - a = 1$$

これを解いて  $a = 4, b = 5$

(iii)  $s = 5$  のとき, ②より  $c = 7$  これらを ①, ③ に代入すると

$$a + b = 49, \quad b - a = 7$$

これを解いて  $a = 21, b = 28$

(iv)  $s = 15$  のとき, ②より  $c = 57$  これらを ①, ③ に代入すると

$$a + b = 3249, \quad b - a = 209$$

これを解いて  $a = 1520, b = 1729$

(5) よって, 求める  $(a, b, c)$  の組は

$$(a, b, c) = (4, 5, 3), (21, 28, 7), (1520, 1729, 57)$$

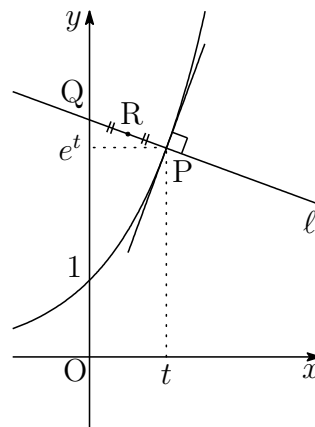
5 (1)  $y = e^x$  を微分すると

$$y' = e^x$$

したがって、曲線  $y = e^x$  上の点  $(t, e^t)$  における法線の方程式は

$$y - e^t = -\frac{1}{e^t}(x - t)$$

よって  $y = -e^{-t}x + te^{-t} + e^t$



(2) (1)の結果から、2点  $P(t, e^t)$ ,  $Q(0, te^{-t} + e^t)$  の中点  $R(x, y)$  は

$$x = \frac{t}{2}, \quad y = \frac{1}{2}(te^{-t} + 2e^t)$$

上の2式から  $t$  を消去することにより、点  $R$  のえがく軌跡  $C$  の方程式は

$$C: y = xe^{-2x} + e^{2x}$$

(3)  $f(x) = xe^{-2x} + e^{2x}$  とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-2x} - 2xe^{-2x} + 2e^{2x} \\ &= e^{-2x}(2e^{4x} - 2x + 1) \end{aligned}$$

ここで、 $g(x) = e^x - x - 1$  とおくと  $g'(x) = e^x - 1$

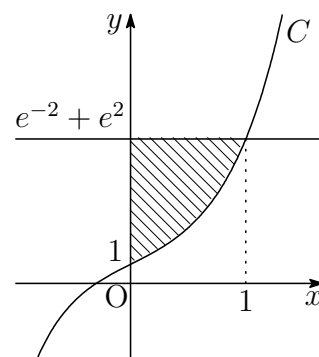
$x$	...	0	...
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘	0	↗

$$g(x) \geq 0 \text{ より } g(4x) = e^{4x} - 4x - 1 \geq 0$$

これを利用すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}e^{-2x}(4e^{4x} - 4x + 2) \\ &= \frac{1}{2}e^{-2x}\{(e^{4x} - 4x - 1) + 3(e^{4x} + 1)\} > 0 \end{aligned}$$

$f(x)$  は単調増加で、 $f(1) = e^{-2} + e^2$  であるから、図形  $F$  は右の図の斜線部分である。



図形  $F$  の面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned}
 S &= 1(e^{-2} + e^2) - \int_0^1 f(x) dx \\
 &= e^{-2} + e^2 - \int_0^1 xe^{-2x} dx - \int_0^1 e^{2x} dx \\
 &= e^{-2} + e^2 + \frac{1}{2} \left[ e^{-2x} \left( x + \frac{1}{2} \right) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \left[ e^{2x} \right]_0^1 \\
 &= \frac{7}{4}e^{-2} + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

(4) 求める回転体の体積を  $V$  とすると

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{\pi} &= (e^{-2} + e^2)^2 - \int_0^1 (xe^{-2x} + e^{2x})^2 dx \\
 &= (e^{-2} + e^2)^2 - \int_0^1 x^2 e^{-4x} dx - \int_0^1 2x dx - \int_0^1 e^{4x} dx \\
 &= (e^{-2} + e^2)^2 + \frac{1}{4} \left[ e^{-4x} \left( x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \right) \right]_0^1 - \left[ x^2 \right]_0^1 - \frac{1}{4} \left[ e^{4x} \right]_0^1 \\
 &= \frac{45}{32}e^{-4} + \frac{3}{4}e^4 + \frac{39}{32}
 \end{aligned}$$

よって  $V = \pi \left( \frac{45}{32}e^{-4} + \frac{3}{4}e^4 + \frac{39}{32} \right)$

補足 次の積分公式が利用できる<sup>2</sup>.

$$\begin{aligned}
 \int e^{px} f(x) dx &= \frac{e^{px}}{p} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \dots \right\} + C \\
 \int e^{-px} f(x) dx &= -\frac{e^{-px}}{p} \left\{ f(x) + \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} + \frac{f'''(x)}{p^3} + \dots \right\} + C
 \end{aligned}$$

上の第2式は第1式の  $p$  を  $-p$  に置き換えたものである。本題では

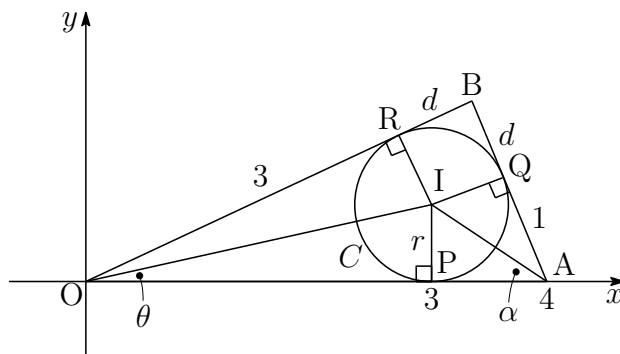
$$\begin{aligned}
 \int x^2 e^{-4x} dx &= -\frac{1}{4}e^{-4x} \left\{ x^2 + \frac{(x^2)'}{4} + \frac{(x^2)''}{4^2} \right\} + C \\
 &= -\frac{1}{4}e^{-4x} \left( x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \right) + C
 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_math\\_2015\\_kouki.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf) (p.7)

- 6 (1) 2辺 AB, BO と  $C$  の接点をそれぞれ Q, R とし,  $BQ = BR = d$  とすると

$$OB = 3 + d, \quad AB = 1 + d$$

よって  $OB - AB = (3 + d) - (1 + d) = 2$



- (2)  $C$  の中心を  $I$  とし,  $\angle IOA = \theta$ ,  $\angle OAI = \alpha$  とすると

$$r = 3 \tan \theta = \tan \alpha$$

$$B = \pi - (2\theta + 2\alpha) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \theta + \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$\tan(\theta + \alpha) > 0$  であるから

$$\tan(\theta + \alpha) = \frac{\tan \theta + \tan \alpha}{1 - \tan \theta \tan \alpha} = \frac{\frac{r}{3} + r}{1 - \frac{r}{3} \cdot r} = \frac{4r}{3 - r^2} > 0$$

したがって  $3 - r^2 > 0$  よって  $0 < r < \sqrt{3}$

- (3)  $B(x, y)$  とおくと ( $y > 0$ ), (1) の結果から

$$OB - 2 = AB$$

これに  $OB = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $AB = \sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$  を代入すると

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 2 = \sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$$

両辺を平方すると

$$x^2 + y^2 - 4\sqrt{x^2 + y^2} + 4 = (x - 4)^2 + y^2$$

整理すると  $2x - 3 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots \textcircled{1}$

さらに両辺を平方すると

$$4x^2 - 12x + 9 = x^2 + y^2 \quad \text{ゆえに} \quad (x - 2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \quad (*)$$

$y > 0$  および ① から，双曲線(\*)の  $x > 3$ ,  $y > 0$  の部分で，その概形は下の図の実線部分である．また漸近線は  $y = \sqrt{3}(x - 2)$  である．

