令和３年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

- $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から 1 題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を実数とする．関数 $f(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2a+1}{2}x^2 - ax$ が $x = a$ で極大値をとるとき，次の問いに答えよ．

(1) a の満たす条件を求めよ．

(2) 次の不等式を解け．

$$|x+1| + |x-2| \leqq 4$$

(3) x が (2) の範囲を動くとき，$f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面において，二つの放物線

$$y = x^2, \quad y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$$

上にそれぞれ点 A(1, 1)，点 C$(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$ をとる．次の問いに答えよ．

(1) 放物線 $y = x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ は垂直であるとする．このとき，B の座標を求めよ．

(2) 放物線 $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は垂直であるとする．このとき，D の座標を求めよ．

(3) B，D はそれぞれ (1)，(2) で定めたものとする．このとき，四角形 ABCD が正方形であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 1 個のさいころを 3 回投げる．1 回目に出た目の数を a，2 回目に出た目の数を b，3 回目に出た目の数を c とする．また，

$$f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) $b^2 > 4c$ である確率を求めよ．

(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつ確率を求めよ．

(3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき，$f'(1) = 7$ である条件付き確率を求めよ．

(4) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき，少なくとも一つが正の解である条件付き確率を求めよ．

4 $a,\ b,\ c$ を実数とし，2 次方程式 $x^2+x-(c-1)=0$ が実数解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ をもつとする．さらに，二つの等式 $a+b=c^2$，$a\alpha+b\beta+c=0$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1) α，β および $b-a$ を，それぞれ c を用いて表せ．

以下において，a，b，c を自然数とする．

(2) $\sqrt{4c-3}$ が自然数でないとき，自然数 a，b，c の組を求めよ．

(3) 自然数 s を用いて，$4c-3=s^2$ と表されるとき，s と a は等式

$$s^5-s^4+6s^3+2s^2+(9-32a)s=-15$$

を満たすことを示せ．

(4) (3) のとき，自然数 a，b，c の組をすべて求めよ．

5 座標平面において，曲線 $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における法線を ℓ とし，ℓ と y 軸との交点を Q とする．$t\neq 0$ のとき，線分 PQ の中点を R とし，$t=0$ のときは $\mathrm{R}(0,\ 1)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) t が実数全体を動くとき，点 R のえがく曲線 C の方程式を求めよ．

(3) (2) の曲線 C，y 軸，直線 $y=e^{-2}+e^2$ で囲まれた図形 F の面積を求めよ．

(4) (3) の図形 F を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ．

6 座標平面において，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 0)$，$\mathrm{P}(3,\ 0)$ とする．線分 OA に点 P で接する円 C を内接円とする $\triangle\mathrm{OAB}$ を考える．ただし，円 C の中心は第 1 象限にあるとする．次の問いに答えよ．

(1) OB と AB の差は一定であることを証明せよ．

(2) 円 C の半径を r とするとき，r のとる値の範囲を求めよ．

(3) r が (2) の範囲で変化するとき，点 B の軌跡の方程式を求めよ．また，その概形をかけ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{2a+1}{2}x^2-ax$ より

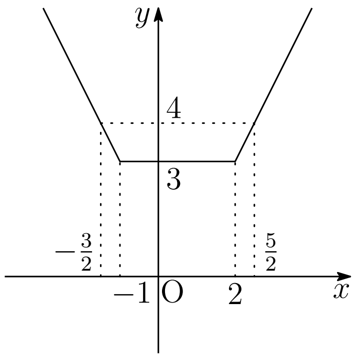
$$f'(x)=-2x^2+(2a+1)x-a=-(2x-1)(x-a)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{2},\ a$

$x=a$ で極大となるから，$f(x)$ の増減により　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}<a}$

(2) $y=|x+1|+|x-2|$ とすると

$$y=\begin{cases}-2x+1 & (x\leqq -1)\\ 3 & (-1\leqq x\leqq 2)\\ 2x-1 & (2\leqq x)\end{cases}$$



グラフから，$|x+1|+|x-2|\leqq 4$ の解は

$$\boldsymbol{-\frac{3}{2}\leqq x\leqq\frac{5}{2}}$$

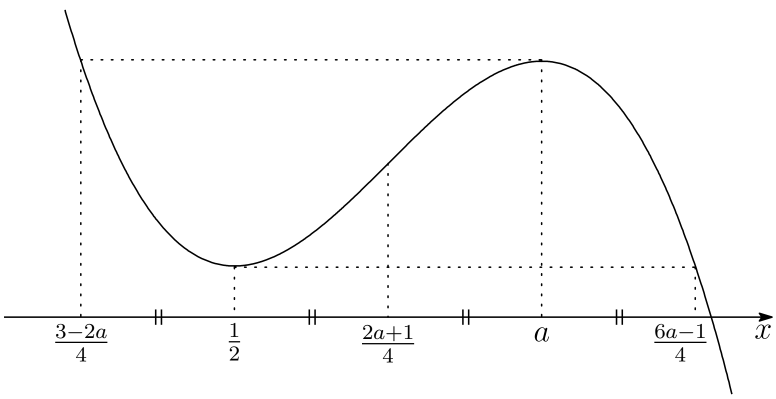
(3) $x=\dfrac{1}{2}$ は定義域 $-\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq\dfrac{5}{2}$ の中央であるから，$f(x)$ の最大値は

$$\max\left(f\left(-\frac{3}{2}\right),\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)=\max\left(\frac{15}{4}a+\frac{27}{8},\ \frac{15}{4}a-\frac{175}{24}\right)=\boldsymbol{\frac{15}{4}a+\frac{27}{8}}$$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{24}=f\left(\dfrac{6a-1}{4}\right)$ であるから

$\dfrac{5}{2}<\dfrac{6a-1}{4}$　すなわち　$\boldsymbol{a>\dfrac{11}{6}}$ のとき　最小値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{24}}$

$\dfrac{6a-1}{4}\leqq\dfrac{5}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}<a\leqq\dfrac{11}{6}}$ のとき　最小値 $f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{15}{4}a-\dfrac{175}{24}}$



補足 $x=\dfrac{1}{2}$ で極小，$x=a$ で極大となるから，その中央 $x=\dfrac{2a+1}{4}$ が変曲点の x 座標となる．ここで，等差数列

$$\frac{3-2a}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{2a+1}{4},\ a,\ \frac{6a-1}{4}$$

をとると，次式が成立する[1]．

$$f\left(\frac{3-2a}{4}\right)=f(a),\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{6a-1}{4}\right)$$

$x=\dfrac{1}{2}$ を極として，$f(x)$ を展開すると

$$\begin{aligned}
f(x)&=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\\
&=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2a-1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3
\end{aligned}$$

$d>0$ とし，$x=\dfrac{1}{2}-d$，$x=\dfrac{1}{2}+d$ に対する $f(x)$ を求めると

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}-d\right)&=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2a-1}{2}d^2+\frac{2}{3}d^3\\
f\left(\frac{1}{2}+d\right)&=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2a-1}{2}d^2-\frac{2}{3}d^3
\end{aligned}$$

上の 2 式から　$f\left(\dfrac{1}{2}-d\right)>f\left(\dfrac{1}{2}+d\right)$

特に，$d=2$ とすると　$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)>f\left(\dfrac{5}{2}\right)$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TSdai/TSdai_2017.pdf (p.6 を参照)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) A(1, 1) と異なる点 B の座標を $(b,\ b^2)$ とすると $(b \neq 1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b-1 \\ b^2-1 \end{pmatrix} = (b-1)\begin{pmatrix} 1 \\ b+1 \end{pmatrix}$$

また，$\mathrm{C}(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \begin{pmatrix} b-\sqrt{2}+1 \\ b^2-\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ であるから

$$\begin{aligned} 1\cdot(b-\sqrt{2}+1)+(b+1)(b^2-\sqrt{2}-1)&=0 \\ b^3+b^2-\sqrt{2}b-2\sqrt{2}&=0 \\ (b-\sqrt{2})\{b^2+(\sqrt{2}+1)b+2\}&=0 \\ (b-\sqrt{2})\left\{\left(b+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2+\frac{5-2\sqrt{2}}{4}\right\}&=0 \end{aligned}$$

したがって　$b=\sqrt{2}$　よって　$\mathbf{B(\sqrt{2},\ 2)}$

(2) 点 $\mathrm{C}(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$ と異なる点 D の座標を $(d, -\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2})$ とすると $(d \neq \sqrt{2}-1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} d-\sqrt{2}+1 \\ -\sqrt{2}d^2+3d-1 \end{pmatrix} = (d-\sqrt{2}+1)\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}d+\sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

また，A(1, 1)，$\mathrm{D}(d, -\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2})$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} d-1 \\ -\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ であるから

$$\begin{aligned} 1\cdot(d-1)+(-\sqrt{2}d+\sqrt{2}+1)(-\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2}-1)&=0 \\ 2d^3-(2+4\sqrt{2})d^2+(2+4\sqrt{2})d&=0 \\ d\{d^2-(1+2\sqrt{2})d+(1+2\sqrt{2})\}&=0 \\ d\left\{\left(d-\frac{1+2\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{4\sqrt{2}-5}{4}\right\}&=0 \end{aligned}$$

したがって　$d=0$　よって　$\mathbf{D(0,\ \sqrt{2})}$

(3) (1)，(2) の結果から

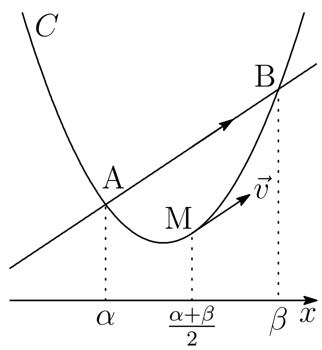
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\sqrt{2}-1,\ 1),\quad \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (-1,\ \sqrt{2}-1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したもの，すなわち，点 B を点 A を中心に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させたものが D である．また　$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-1,\ \sqrt{2}-1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

よって，四角形 ABCD は正方形である．

補足 放物線 $C : y = f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ を通る直線は C 上の $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ における接線と平行である．



$f(x) = ax^2 + bx + c$ とすると

$$f'(x) = 2ax + b$$

であるから

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

本題の放物線について，$f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ とすると

$$f'(x) = -2\sqrt{2}x + 3$$

2 点 $\mathrm{C}(\sqrt{2}-1, f(\sqrt{2}-1))$，$\mathrm{D}(d,\ f(d))$ を通る直線の傾きは

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\sqrt{2}-1+d}{2}\right) &= -2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}-1+d}{2} + 3 \\ &= -\sqrt{2}d + \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $b^2 > 4c$ より　$c < \dfrac{1}{4}b^2$　これを満たす $(b,\ c)$ の組は，次の 17 組

- $b = 1, 2$ のとき　c はなし
- $b = 3$ のとき　$c = 1, 2$
- $b = 4$ のとき　$c = 1, 2, 3$
- $b = 5, 6$ のとき　$c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

よって，求める確率は　$\dfrac{17}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{17}{36}}$

(2) (i) $a=1,3,5$ のとき，$f(x)=-x^2+bx+c$ であるから，係数について

$$D=b^2+4c>0$$

このとき，つねに異なる 2 つの実数解をもつ．

(ii) $a=2,4,6$ のとき，$f(x)=x^2+bx+c$ であるから，$f(x)=0$ が異なる二つの実数解をもつ条件は

$$b^2-4c>0 \quad \text{すなわち} \quad b^2>4c$$

よって，求める確率は，(i),(ii) および (1) の結果から

$$\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{17}{36}=\boldsymbol{\frac{53}{72}}$$

(3) まず，2 つの事象を次のように定める．

A :「2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる二つの実数解をもつ」

B :「$f'(1)=7$ である」

(2) の結果から　$P(A)=\dfrac{53}{72}$

$f'(x)=2(-1)^a x+b$ より，$f'(1)=7$ のとき

$$2(-1)^a+b=7$$

これを満たす $(a,\ b)$ は，次の 3 組

$$(a,\ b)=(2,\ 5),\ (4,\ 5),\ (6,\ 5)$$

(ii) より　$B\Longrightarrow A$　ゆえに　$P(B)=P(A\cap B)=\dfrac{3}{6^2}=\dfrac{1}{12}$

よって，求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{53}{72}}=\boldsymbol{\frac{6}{53}}$$

(4) $a=2,4,6$ のとき，$x>0$ に対し，$f(x)=x^2+bx+c>0$ であるから，このとき，方程式 $f(x)=0$ は正の解をもたない．

$a=1,3,5$ のとき，(i) より，$f(x)=0$ は，異なる二つの実数解をもち，それらを α, β とすると，解との係数の関係により

$$\alpha\beta=-c<0$$

このとき，少なくとも一つの正の解をもつ．

「$f(x)=0$ が少なくとも一つの正の解をもつ」事象を C とすると

$$P(A\cap C)=\frac{3}{6}\times 0+\frac{3}{6}\times 1=\frac{1}{2}$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{53}{72}}=\boldsymbol{\frac{36}{53}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) α, β $(\alpha<\beta)$ は，2 次方程式 $x^2+x-(c-1)=0$ の解であるから

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{-1-\sqrt{4c-3}}{2},\quad \beta=\frac{-1+\sqrt{4c-3}}{2}}$$

$a+b=c^2\cdots$①，$a\alpha+b\beta+c=0$ より，$\beta-\alpha\neq 0$ に注意して

$$a=\frac{c}{\beta-\alpha}(c\beta+1),\quad b=\frac{c}{\beta-\alpha}(-c\alpha-1) \qquad (*)$$

上の 2 式および $\alpha+\beta=-1$ から

$$b-a=\frac{c}{\beta-\alpha}\{-c(\alpha+\beta)-2\}=\boldsymbol{\frac{c}{\sqrt{4c-3}}(c-2)} \qquad (**)$$

(2) $\sqrt{4c-3}$ が自然数でない有理数であると仮定すると，

$$\sqrt{4c-3} = \frac{p}{q}$$

とする ($p,\ q$ は互いに素である整数, $q \neq 1$)．この両辺を平方すると

$$4c-3 = \frac{p^2}{q^2}$$

c は自然数より，左辺は自然数であるから，$q=1$ となり矛盾．
したがって，$\sqrt{4c-3}$ は無理数である．(1) の結果から

$$(b-a)\sqrt{4c-3} = c(c-2)$$

$b-a \neq 0$ と仮定すると，$a,\ b$ は自然数であるから，上式の左辺は無理数，右辺は有理数となり，矛盾．したがって，$b-a=0$ より

$$c(c-2) = 0$$

c は自然数であるから　$\boldsymbol{c=2}$　さらに ① より　$\boldsymbol{a=b=2}$

(3) (1) の結果から

$$\beta - \alpha = \sqrt{4c-3} = s \quad \text{さらに} \quad c = \frac{s^2+3}{4} \cdots ②, \quad \beta = \frac{-1+s}{2}$$

これらを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$a = \frac{1}{s}\cdot\frac{s^2+3}{4}\left(\frac{s^2+3}{4}\cdot\frac{-1+s}{2}+1\right)$$

したがって　　$32as = (s^2+3)\{(s^2+3)(s-1)+8\}$

これを整理すると　$s^5 - s^4 + 6s^3 + 2s^2 + (9-32a)s = -15$

(4) (3) の結果から

$$s\{s^4 - s^3 + 6s^2 + 2s + (9 - 32a)\} = -15$$

s は自然数であるから，$s = 1,\ 3,\ 5,\ 15$ の場合について調べればよい．

$(**)$ より　　$b - a = \dfrac{c(c-2)}{s}$　$\cdots$③

(i) $s = 1$ のとき，②より　$c = 1$　これらを ①，③ に代入すると

$$a + b = 1,\quad b - a = -1$$

このとき，$b = 0$ となり，条件に反し，不適

(ii) $s = 3$ のとき，② より　$c = 3$　これらを ①，③ に代入すると

$$a + b = 9,\quad b - a = 1$$

これを解いて　$a = 4,\ b = 5$

(iii) $s = 5$ のとき，② より　$c = 7$　これらを ①，③ に代入すると

$$a + b = 49,\quad b - a = 7$$

これを解いて　$a = 21,\ b = 28$

(iv) $s = 15$ のとき，② より　$c = 57$　これらを ①，③ に代入すると

$$a + b = 3249,\quad b - a = 209$$

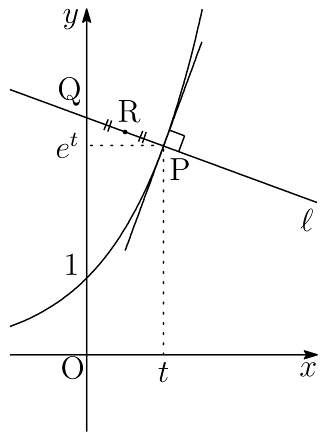
これを解いて　$a = 1520,\ b = 1729$

(5) よって，求める $(a,\ b,\ c)$ の組は

$$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (4,\ 5,\ 3),\ (21,\ 28,\ 7),\ (1520,\ 1729,\ 57)}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $y = e^x$ を微分すると



$$y' = e^x$$

したがって，曲線 $y = e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における法線の方程式は

$$y - e^t = -\frac{1}{e^t}(x - t)$$

よって　　$\boldsymbol{y = -e^{-t}x + te^{-t} + e^t}$

(2) (1) の結果から，2 点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$，$\mathrm{Q}(0,\ te^{-t} + e^t)$ の中点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ は

$$x = \frac{t}{2},\quad y = \frac{1}{2}(te^{-t} + 2e^t)$$

上の 2 式から t を消去することにより，点 R のえがく軌跡 C の方程式は

$$\boldsymbol{C : y = xe^{-2x} + e^{2x}}$$

(3) $f(x) = xe^{-2x} + e^{2x}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-2x} - 2xe^{-2x} + 2e^{2x} \\ &= e^{-2x}(2e^{4x} - 2x + 1) \end{aligned}$$

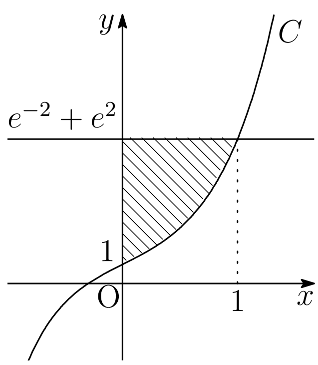
ここで，$g(x) = e^x - x - 1$ とおくと　$g'(x) = e^x - 1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$g(x) \geqq 0$ より　$g(4x) = e^{4x} - 4x - 1 \geqq 0$

これを利用すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}e^{-2x}(4e^{4x} - 4x + 2) \\ &= \frac{1}{2}e^{-2x}\{(e^{4x} - 4x - 1) + 3(e^{4x} + 1)\} > 0 \end{aligned}$$



$f(x)$ は単調増加で，$f(1) = e^{-2} + e^2$ であるから，図形 F は右の図の斜線部分である．

図形 F の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= 1(e^{-2}+e^{2}) - \int_0^1 f(x)\,dx \\
&= e^{-2}+e^{2} - \int_0^1 xe^{-2x}\,dx - \int_0^1 e^{2x}\,dx \\
&= e^{-2}+e^{2} + \frac{1}{2}\Big[\,e^{-2x}\left(x+\frac{1}{2}\right)\,\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\Big[\,e^{2x}\,\Big]_0^1 \\
&= \boldsymbol{\frac{7}{4}e^{-2} + \frac{1}{2}e^{2} + \frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

(4) 求める回転体の体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= (e^{-2}+e^{2})^2 - \int_0^1 (xe^{-2x}+e^{2x})^2\,dx \\
&= (e^{-2}+e^{2})^2 - \int_0^1 x^2e^{-4x}\,dx - \int_0^1 2x\,dx - \int_0^1 e^{4x}\,dx \\
&= (e^{-2}+e^{2})^2 + \frac{1}{4}\Big[\,e^{-4x}\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\right)\,\Big]_0^1 - \Big[\,x^2\,\Big]_0^1 - \frac{1}{4}\Big[\,e^{4x}\,\Big]_0^1 \\
&= \frac{45}{32}e^{-4} + \frac{3}{4}e^{4} + \frac{39}{32}
\end{aligned}
$$

よって　　$\boldsymbol{V = \pi\left(\frac{45}{32}e^{-4} + \frac{3}{4}e^{4} + \frac{39}{32}\right)}$

補足 次の積分公式が利用できる [2].

$$
\int e^{px}f(x)\,dx = \frac{e^{px}}{p}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots\right\} + C
$$

$$
\int e^{-px}f(x)\,dx = -\frac{e^{-px}}{p}\left\{f(x) + \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} + \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots\right\} + C
$$

上の第 2 式は第 1 式の p を $-p$ に置き換えたものである．本題では

$$
\begin{aligned}
\int x^2e^{-4x}\,dx &= -\frac{1}{4}e^{-4x}\left\{x^2 + \frac{(x^2)'}{4} + \frac{(x^2)''}{4^2}\right\} + C \\
&= -\frac{1}{4}e^{-4x}\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\right) + C
\end{aligned}
$$

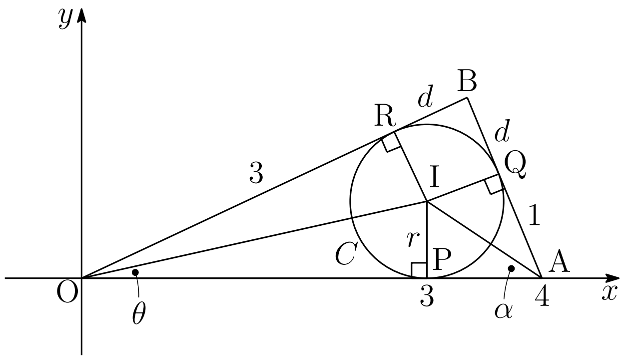
■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf (p.7)

6 (1) 2辺AB，BOとCの接点をそれぞれQ，Rとし，$\mathrm{BQ}=\mathrm{BR}=d$とすると

$$\mathrm{OB}=3+d,\quad \mathrm{AB}=1+d$$

よって　$\mathrm{OB}-\mathrm{AB}=(3+d)-(1+d)=2$



(2) Cの中心をIとし，$\angle\mathrm{IOA}=\theta$，$\angle\mathrm{OAI}=\alpha$とすると

$$r=3\tan\theta=\tan\alpha$$

$B=\pi-(2\theta+2\alpha)>0$　ゆえに　$\theta+\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

$\tan(\theta+\alpha)>0$であるから

$$\tan(\theta+\alpha)=\frac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\theta\tan\alpha}=\frac{\frac{r}{3}+r}{1-\frac{r}{3}\cdot r}=\frac{4r}{3-r^2}>0$$

したがって　$3-r^2>0$　よって　$\boldsymbol{0<r<\sqrt{3}}$

(3) $\mathrm{B}(x,\ y)$とおくと$(y>0)$，(1)の結果から

$$\mathrm{OB}-2=\mathrm{AB}$$

これに$\mathrm{OB}=\sqrt{x^2+y^2}$，$\mathrm{AB}=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$を代入すると

$$\sqrt{x^2+y^2}-2=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$$

両辺を平方すると

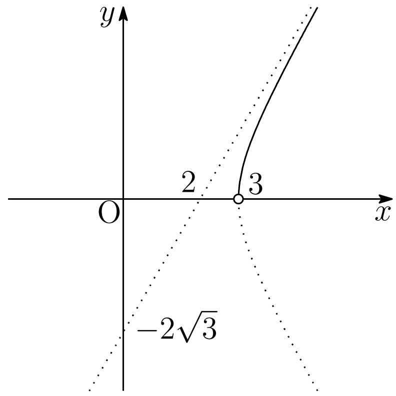
$$x^2+y^2-4\sqrt{x^2+y^2}+4=(x-4)^2+y^2$$

整理すると　$2x-3=\sqrt{x^2+y^2}$　$\cdots$①

さらに両辺を平方すると

$$4x^2-12x+9=x^2+y^2\quad ゆえに\quad (x-2)^2-\frac{y^2}{3}=1\qquad (*)$$

$y>0$ および ① から，双曲線 $(*)$ の $x>3$, $y>0$ の部分で，その概形は下の図の実線部分である．また漸近線は $y=\sqrt{3}(x-2)$ である．



■