令和２年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

1 $a,\ b$ を正の定数とする．$0 < \theta < \pi$ を満たす実数 θ に対し，平面上で，次の三つの条件 (i)，(ii)，(iii) を満たす三角形 PAB，およびこの三角形と辺 AB を共有する長方形 ABCD を考える．

(i) $\mathrm{PA} = a$，$\mathrm{PB} = b$，$\angle \mathrm{APB} = \theta$ である．

(ii) 2 点 C，D はともに直線 AB に関して点 P と反対側にある．

(iii) $\mathrm{AB} = 3\mathrm{AD}$ である．

三角形 PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とする．次の問いに答えよ．

(1) 辺 AB の長さを $a,\ b,\ \theta$ を用いて表せ．

(2) S を $a,\ b,\ \theta$ を用いて表せ．

(3) θ が $0 < \theta < \pi$ の範囲を動くときの S の最大値を M とし，S が最大値 M をとるときの θ の値を β とする．M を $a,\ b$ を用いて表せ．また，$\sin\beta$ および $\cos\beta$ の値をそれぞれ求めよ．

(4) $a = 16,\ b = 25$ とする．また，β を (3) で定めた値とする．$\theta = \beta$ のときの，点 P と直線 AB の距離を求めよ．

2 i を虚数単位とする．$z \neq -1$ を満たす複素数 z に対し，

$$w = \frac{z - i}{z + 1}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $z \neq -1$ のとき $w \neq 1$ であることを示せ．また，$w \neq 1$ のとき，z を w を用いて表せ．

(2) t を -1 と異なる実数とする．複素数平面において，実部が t である複素数全体の描く直線を ℓ_t とおく．点 z が直線 ℓ_t 上を動くとき，点 w はある円 S_t から 1 点を取り除いた図形の上を動く．この円 S_t の中心 P_t に対応する複素数を t を用いて表せ．

(3) P_t を (2) で定義した点とする．t が -1 以外の実数全体を動くときに P_t が描く図形を，複素数平面上に図示せよ．

3 関数 $f(x) = xe^{-2x^2}$ について，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 関数 $f(x)$ の極大値および極小値を求めよ．また，極大値をとるときの x の値，および極小値をとるときの x の値を求めよ．

(2) $a > 0$ とし，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を考える．また，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を ℓ_t とおく．ℓ_t が点 A を通るような実数 t がちょうど二つあるとする．このとき，a の値を求めよ．さらに，その二つの t の値を $p,\ q$ (ただし，$p < q$) とおくとき，$p,\ q$ を求めよ．

(3) q を (2) で定めた値とする．曲線 $y = f(x)$，直線 $x = q$ および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

4 n を正の整数とする．次の問いに答えよ．

(1) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx\, dx$$

の値を求めよ．

(2) 定積分

$$\int_0^{\pi} |\sin nx|\, dx$$

の値を求めよ．

(3) 座標平面において連立不等式

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \frac{1}{2}, \quad y \leqq |\sin nx|$$

の表す図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

(4) 座標平面において連立不等式

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \sqrt{x}\,|\sin nx|$$

の表す図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 1個のさいころを3回投げる．1回目に出た目を a_1，2回目に出た目を a_2，3回目に出た目を a_3 とする．次に，1枚の硬貨を3回投げる．$k = 1, 2, 3$ に対し，k 回目に表が出た場合は $b_k = 1$，裏が出た場合は $b_k = a_k$ とおく．ベクトル

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3), \quad \vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ である確率を求めよ．

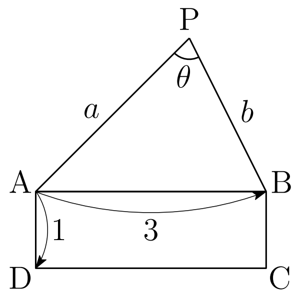
(2) $b_1 = 1$ である確率を求めよ．

(3) $\vec{b} = (1,\ 1,\ 1)$ であったとき，$\vec{a} = (1,\ 1,\ 5)$ である条件付き確率を求めよ．

(4) $\vec{b} = (1,\ 1,\ 1)$ であったとき，$a_1 + a_2 + a_3 = 7$ である条件付き確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) △PAB に余弦定理を適用すると



$$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

$\mathrm{AB} > 0$ であるから

$$\mathbf{AB} = \boldsymbol{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}}$$

(2) $\mathrm{AD} = \dfrac{1}{3}\mathrm{AB}$ であるから

$$\text{長方形 ABCD の面積} = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD} = \frac{1}{3}\mathrm{AB}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)$$

また，$\triangle\mathrm{PAB} = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}(a^2 + b^2) + \frac{ab}{6}(3\sin\theta - 4\cos\theta)} \end{aligned}$$

(3) $\cos\varphi = \dfrac{3}{5}$, $\sin\varphi = -\dfrac{4}{5}$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < 0\right)$，(2) の結果から

$$S = \frac{1}{3}(a^2 + b^2) + \frac{5ab}{6}\sin(\theta + \varphi)$$

$0 < \theta < \pi$ より，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta + \varphi < \pi$ であるから，S が最大なるとき，$\theta = \beta$ であるから

$$\beta + \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

よって
$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi = \boldsymbol{\frac{3}{5}}$$
$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \boldsymbol{-\frac{4}{5}}$$

(4) $a = 16$，$b = 25$，$\theta = \beta$ のとき　$S = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta = \dfrac{1}{2}\cdot16\cdot25\cdot\dfrac{3}{5} = 120$

$$\mathrm{AB} = \sqrt{16^2 + 25^2 - 2\cdot16\cdot25\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)} = \sqrt{1521} = 39$$

点 P から直線 AB までの距離を h とすると，$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot h$ であるから

$$120 = \frac{1}{2}\cdot39h \quad \text{よって} \quad h = \boldsymbol{\frac{80}{13}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $w=\dfrac{z-i}{z+1}$ より　$w-1=-\dfrac{1+i}{z+1}\neq 0$

したがって，$z\neq -1$ のとき，$w-1\neq 0$，すなわち，$w\neq 1$

また　$w(z+1)=z-i$　ゆえに　$(w-1)z=-w-i$

$w\neq 1$ に注意して　$\boldsymbol{z=-\dfrac{w+i}{w-1}}$

(2) 実部が t の直線 ℓ_t 上の点 z において　$z+\overline{z}=2t$

これに (1) の結果を代入すると　$-\dfrac{w+i}{w-1}-\dfrac{\overline{w}-i}{\overline{w}-1}=2t$

$$(w+i)(\overline{w}-1)+(w-1)(\overline{w}-i)+2t(w-1)(\overline{w}-1)=0$$
$$2(t+1)|w|^2-(2t+1+i)w-(2t+1-i)\overline{w}+2t=0$$

$t\neq -1$ より，$t+1\neq 0$ であるから

$$|w|^2-\frac{2t+1+i}{2(t+1)}w-\frac{2t+1-i}{2(t+1)}\overline{w}=-\frac{t}{t+1}$$
$$\left|w-\frac{2t+1-i}{2(t+1)}\right|^2=\frac{(2t+1)^2+1}{4(t+1)^2}-\frac{t}{t+1}$$

したがって　$\left|w-\dfrac{2t+1-i}{2(t+1)}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}|t+1|}$

上式および (1) の結果から，点 w は点 $\dfrac{2t+1-i}{2(t+1)}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}|t+1|}$ の点 1 を除く円周上を動く．よって，求める円 S_t の中心 P_t は　$\boldsymbol{\dfrac{2t+1-i}{2(t+1)}}$

補足 ℓ_t の点を $z=t+(t+1)i\tan\theta$ とおくと [1]$\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
w&=1-\frac{1+i}{z+1}=1-\frac{1+i}{(t+1)(1+i\tan\theta)}\\
&=1-\frac{(1+i)\cos\theta}{(t+1)(\cos\theta+i\sin\theta)}=1-\frac{(1+i)\cos\theta(\cos\theta-i\sin\theta)}{t+1}\\
&=1-\frac{(1+i)(1+\cos 2\theta-i\sin 2\theta)}{2(t+1)}\\
&=1-\frac{1+i}{2(t+1)}-\frac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\{\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)\}}{2(t+1)}\\
&=\frac{2t+1-i}{2(t+1)}-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\theta\right)}{\sqrt{2}(t+1)}
\end{aligned}$$

$-\frac{3\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-2\theta<\frac{5\pi}{4}$ であるから，点 1 を除く円周上を動く．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2019.pdf $\boxed{5}$ の解説を参照．

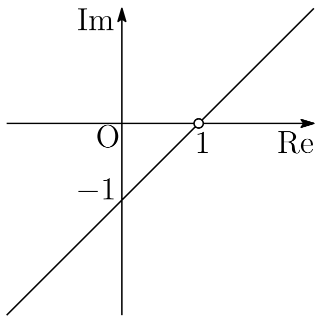
(3) (2) の結果から

$$\frac{2t+1-i}{2(t+1)} = x + yi \quad (x,\ y \text{ は実数})$$

ゆえに　$x = \dfrac{2t+1}{2(t+1)}, \quad y = -\dfrac{1}{2(t+1)}$

したがって　$x - 1 = y = -\dfrac{1}{2(t+1)} \neq 0$

よって　$\boldsymbol{y = x - 1 \ \ (x \neq 1)}$



3 (1) $f(x) = xe^{-2x^2}$ より

$$f'(x) = e^{-2x^2} + x(-4x)e^{-2x^2} = (1+2x)(1-2x)e^{-2x^2}$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{2}}$ **のとき極大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt{e}}}$，$\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{2}}$ **のとき極小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}}$

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線 ℓ_t の方程式は

$$y - te^{-2t^2} = (1-4t^2)e^{-2t^2}(x-t)$$

ℓ_t が点 $(a,\ 0)$ を通ることから

$$-t = (1-4t^2)(a-t) \quad \text{ゆえに} \quad 4t^3 - 4at^2 + a = 0 \quad \cdots(*)$$

$g(t) = 4t^3 - 4at^2 + a$ とおくと　$g'(t) = 12t^2 - 8at = 4t(3t-2a)$

$a > 0$ より，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

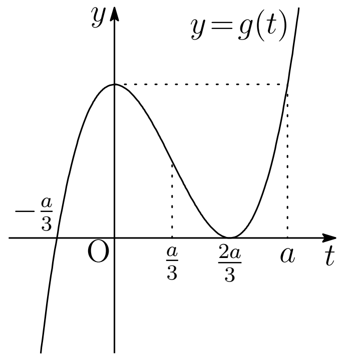
t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2a}{3}$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$-\frac{16}{27}a^3 + a$	$\nearrow$

$g(t) = 0$ の解がちょうど 2 個であるから，$a \neq 0$ に注意して

$$-\frac{16}{27}a^3 + a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a\left(a^2 - \frac{27}{16}\right) = 0$$

$a > 0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{a = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$

このとき，$p<0<q=\dfrac{2a}{3}$ であり，方程式 $(*)$ の解は $p,\ q$ (q は 2 重解) であるから，解と係数の関係により

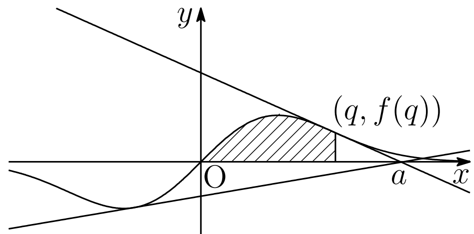


$$p+\frac{2a}{3}+\frac{2a}{3}=a \quad ゆえに \quad p=-\frac{a}{3}$$

よって $\quad p=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$

$$q=\frac{2}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

補足 右上の $y=g(t)$ のグラフの t 座標 $-\dfrac{a}{3},\ 0,\ \dfrac{a}{3},\ \dfrac{2a}{3},\ a$ は等差数列をなす[2].
$f'(x)=(1-4x^2)e^{-2x^2}$ より，$f''(x)=4x(4x^2-3)e^{-2x^2}$ であるから，曲線 $y=f(x)$ 上の変曲点は $(-q,\ f(-q))$，$(0,\ 0)$，$(q,\ f(q))$ である．点 $(q, f(q))$ における接線が点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を通る $(a>0)$．3 次関数のグラフに引いた接線の本数についても，変曲点を通る場合が 2 本である[3].



(3) (2) の結果から，求める図形の面積は

$$\int_0^q xe^{-2x^2}=\left[-\frac{1}{4}e^{-2x^2}\right]_0^q=\frac{1}{4}(1-e^{-2q^2})=\boldsymbol{\frac{1}{4}(1-e^{-\frac{3}{2}})}$$

$\boxed{4}$ (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin nx\,dx=\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{n}}=\boldsymbol{\frac{2}{n}}$

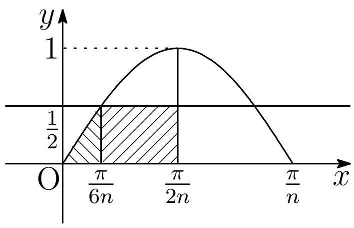
(2) $\left|\sin n\left(x+\dfrac{\pi}{n}\right)\right|=|\sin nx|$ より，$y=|\sin nx|$ は周期 $\dfrac{\pi}{n}$ の周期関数であるから，求める定積分を S とすると

$$\frac{S}{n}=\int_0^{\frac{\pi}{n}}|\sin nx|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin nx\,dx=\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\frac{n}{\pi}}=\frac{2}{n}$$

よって $\quad S=\boldsymbol{2}$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_ri_2015.pdf (p.4 の解説を参照)
[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf $\boxed{2}$ の解説を参照

(3) 右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_n とすると



$$\begin{aligned}\frac{V_n}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{6n}} \sin^2 nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{6n}}^{\frac{\pi}{2n}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6n}} \frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx + \int_{\frac{\pi}{6n}}^{\frac{\pi}{2n}} \frac{1}{4}\,dx \\ &= \left[\,\frac{x}{2} - \frac{1}{4n}\sin 2nx\,\right]_0^{\frac{\pi}{6n}} + \left[\,\frac{x}{4}\,\right]_{\frac{\pi}{6n}}^{\frac{\pi}{2n}} \\ &= \frac{\pi}{6n} - \frac{\sqrt{3}}{8n}\end{aligned}$$

よって，求める体積は　$2nV_n = 2n\left(\dfrac{\pi}{6n} - \dfrac{\sqrt{3}}{8n}\right)\pi = \boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\pi}$

別解 y 軸を元に $y = |\sin nx|$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ を x 軸方向に n 倍に拡大したものは，$y = |\sin x|$ $(0 \leqq x \leqq n\pi)$ であり，x 軸の周りの回転体の体積が n 倍される．求める体積を V_0 とすると

$$\begin{aligned}\frac{V_0}{2\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\,dx \\ &= \left[\,\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\,\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[\,\frac{x}{4}\,\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

(4) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^{\pi} (\sqrt{x}\,|\sin nx|)^2\,dx = \int_0^{\pi} x\sin^2 nx\,dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{x}{2}(1-\cos 2nx)\,dx \\ &= \left[\,\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4n}x\sin 2nx - \frac{1}{8n^2}\cos 2nx\,\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V = \dfrac{\pi^3}{4}}$

$\boxed{5}$ (1) $a_1+a_2+a_3=7$ の場合の数の総数は，7 個の○を一列に並べ，間の 6 カ所のうち 2 カ所に仕切りを作り，区切られた○の個数を順番に $a_1,\ a_2,\ a_3$ としたときの場合の総数に等しい．よって，求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{6^3}=\mathbf{\frac{5}{72}}$$

(2) $b_1=1$ となるのは，次の事象である．

- 1 回目に投げた硬貨が表である．
- 1 回目に投げた硬貨が裏で，$a_1=1$ である．

これらの事象は，互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{7}{12}}$$

(3) $\vec{a}=(1,\ 1,\ 5)$，$\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ となる事象をそれぞれ A，B とする．(2) の結果から

$$P(B)=\left(\frac{7}{12}\right)^3$$

$A\cap B$ は，さいころの出た目が順に 1, 1, 5 で，硬貨は，1，2 回目は表・裏どちらでもよく，3 回目が裏となる事象であるから

$$P(A\cap B)=\left(\frac{1}{6}\right)^3\times 1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^3$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{12}{7}\right)^3=\mathbf{\frac{4}{343}}$$

(4) $a_1+a_2+a_3=7$ となる事象を C とする．$B\cap C$ は，$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ の組合せが $\{1,\ 1,\ 5\}$，$\{1,\ 2,\ 4\}$，$\{1,\ 3,\ 3\}$，$\{2,\ 2,\ 3\}$ の場合であるから

$$\begin{aligned}P(B\cap C)&=\left(\frac{1}{6}\right)^3\left\{\frac{3!}{2!}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}+3!\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3!}{2!}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3!}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}\\&=\left(\frac{1}{6}\right)^3\frac{33}{8}\end{aligned}$$

求める条件付き確率は　$P_B(C)=\dfrac{P(B\cap C)}{P(B)}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\dfrac{33}{8}\times\left(\dfrac{12}{7}\right)^3=\mathbf{\dfrac{33}{343}}$