平成 31 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

$\boxed{\mathbf{1}}$ $a>0$，$r>0$ とし，数列 $\{a_n\}$ を初項 a，公比 r の等比数列とする．また，数列 $\{b_n\}$ は次のように定義される．

$$b_1=a_1,\quad b_{n+1}=b_na_{n+1}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

次の問いに答えよ．

(1) b_n を a，r および n を用いて表せ．

(2) 一般項が
$$c_n=\frac{\log_2 b_n}{n}$$
である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明せよ．

(3) (2) で与えられた数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの平均を M_n とする．すなわち，
$$M_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_k$$
とする．このとき，一般項が
$$d_n=2^{M_n}$$
である数列 $\{d_n\}$ は等比数列であることを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 箱の中に 1 から N までの数が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている．ただし，N を 2 以上の自然数とする．「カードをよく混ぜて 1 枚取り出し，そのカードに書かれた数を読み取り，そのカードをもとに戻す」という試行を 4 回繰り返す．1 回目，2 回目，3 回目および 4 回目に取り出したカードに書かれた数を，それぞれ a_1, a_2, a_3, a_4 とする．また，座標平面上に 4 点 $\mathrm{P_1}(a_1,\ 0)$，$\mathrm{P_2}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{P_3}(a_1-a_3,\ a_2)$，$\mathrm{P_4}(a_1-a_3,\ a_2-a_4)$ を定める．次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{P_4}$ が原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ に一致する確率を N を用いて表せ．

(2) $\mathrm{P_4}$ が連立不等式 $x \geqq 0$，$y \leqq 0$ の表す領域にある確率を N を用いて表せ．

(3) $\mathrm{P_4}$ が直線 $y=x$ 上にある確率を N を用いて表せ．

(4) $N=2^m$ とする．ただし，m を自然数とする．$\mathrm{P_4}$ が原点 O に一致し，かつ，四角形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ の面積が 2^m となる確率を m を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x)$ は実数全体で連続で，すべての実数 x に対して

$$f(x) = (1-x)\cos x + x\sin x - \int_0^x e^{x-t} f(t)\,dt$$

を満たすとする．ただし，e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) $f(0)$ の値を求めよ．また，$f'(x) = 2(x-1)\cos x$ が成り立つことを示せ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) 方程式 $f(x) = 0$ は，$0 < x < \pi$ の範囲にただ一つの解をもつことを示せ．

(4) (3) のただ一つの解を α とする．曲線 $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq \alpha)$，x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を S_1 とし，曲線 $y = f(x)$ $(\alpha \leqq x \leqq \pi)$，$x$ 軸および直線 $x = \pi$ によって囲まれる部分の面積を S_2 とする．S_1 と S_2 の大小を判定せよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ i を虚数単位とし，複素数 z に対して，

$$w = z^2 + 2z + 1 - 2i$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) w の実部が 0 となる複素数 z 全体を複素数平面上に図示せよ．

(2) $w = 0$ を満たす複素数 z の個数は 2 個であることを証明し，それぞれを $a + bi$ $(a,\ b$ は実数$)$ の形に書き表せ．

(3) (2) で求めた二つの複素数のうち実部の大きい方を α，実部の小さい方を β とし，対応する複素数平面上の点をそれぞれ A，B とする．また，線分 AB の中点を M とする．複素数 z に対応する複素数平面上の点が，線分 AM 上 (両端を含む) を動くとき，複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(4) 複素数 z に対応する複素数平面上の点が，点 A を通り線分 AB に垂直な直線上を動くとき，複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ．

$\boxed{\textbf{5}}$ 原点をOとする座標平面上において，点$\mathrm{A}(0,\ 3)$，$\mathrm{B}(0, -1)$およびx軸上の正の部分を動く点$\mathrm{P}(t,\ 0)$があり，$\angle\mathrm{APB}$は鈍角でないとする．$\triangle\mathrm{ABP}$の垂心をH，頂点Aから辺BPに下ろした垂線と辺BPとの交点をD，頂点Bから辺PAに下ろした垂線と辺PAとの交点をEとする．次の問いに答えよ．ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした3本の垂線は1点で交わることが知られている．その交点のことを，三角形の垂心という．

(1) $\angle\mathrm{APB}$が直角となるtの値を求めよ．

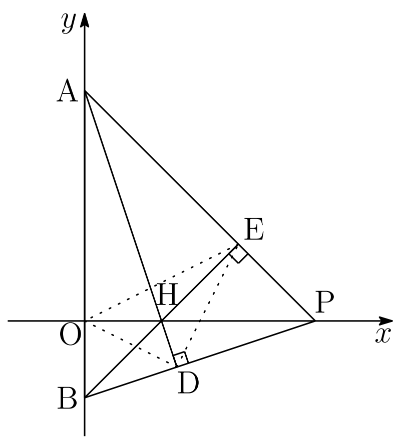
(2) 点Hの座標をtを用いて表せ．

以下では，tが(1)で求めた値よりも大きい値をとるとする．

(3) 点Hが$\triangle\mathrm{ODE}$の内心であることを証明せよ．ただし，1組の対角の和が180°である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい．

(4) $\triangle\mathrm{ODE}$の内接円の半径をtの関数$f(t)$として表せ．

(5) (4)で求めた関数$f(t)$は最大値をもつことを示せ．ただし，最大値を与えるtの値を求める必要はない．



解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 a，公比 r の等比数列であるから $(a>0,\ r>0)$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$b_1 = a_1 = a$，$b_{n+1} = b_n a_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ より $\quad \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = ar^n$

$n \geqq 2$ のとき

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \prod_{k=1}^{n-1} ar^k \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b_n}{a} = a^{n-1} r^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$n = 1$ のときも，上式は成立することから $\quad \boldsymbol{b_n = a^n r^{\frac{1}{2}n(n-1)}}$

(2) (1) の結果から $\quad \log_2 b_n = n\log_2 a + \dfrac{1}{2}n(n-1)\log_2 r$

したがって $\quad c_n = \dfrac{\log_2 b_n}{n} = \log_2 a + \dfrac{1}{2}(n-1)\log_2 r$

よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項 $\log_2 a$，公差 $\dfrac{1}{2}\log_2 r$ の等差数列

(3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \log_2 a + \frac{1}{2}(k-1)\log_2 r \right\} = n\log_2 a + \frac{1}{4}n(n-1)\log_2 r$$

ゆえに

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k = \frac{1}{n}\left\{ n\log_2 a + \frac{1}{4}n(n-1)\log_2 r \right\} \\ &= \log_2 a + \frac{1}{4}(n-1)\log_2 r \end{aligned}$$

したがって $\quad d_n = 2^{M_n} = ar^{\frac{1}{4}(n-1)}$

よって，数列 $\{d_n\}$ は，初項 a，公比 $r^{\frac{1}{4}}$ の等比数列である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_1 - a_3 = 0$，すなわち，$a_1 = a_3$ を満たす $(a_1,\ a_3)$ の組は　N (組)

同様に，$a_2 - a_4 = 0$ を満たす $(a_2,\ a_4)$ の組も　N (組)

よって，求める確率は　$\dfrac{N \cdot N}{N^4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{N^2}}$

(2) $a_1 - a_3 > 0$，すなわち，$a_1 > a_3$ を満たす $(a_1,\ a_3)$ の組は　${}_N\mathrm{C}_2$ (組)

$a_1 - a_3 = 0$ を満たす $(a_1,\ a_3)$ の組は，(1) で示した　N (組)

ゆえに，$a_1 - a_3 \geqq 0$ を満たす組は　${}_N\mathrm{C}_2 + N = \dfrac{1}{2}N(N+1)$

同様に，$a_2 - a_4 \geqq 0$ を満たす組も　$\dfrac{1}{2}N(N+1)$

よって，求める確率は　$\dfrac{\left\{\frac{1}{2}N(N+1)\right\}^2}{N^4} = \boldsymbol{\dfrac{(N+1)^2}{4N^2}}$

(3) P_4 が直線 $y = x$ 上にあるとき

$$a_1 - a_3 = a_2 - a_4 = k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm(N-1)\,)$$

それぞれの k に対する $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ の組数は　$N - |k|$

その総数は

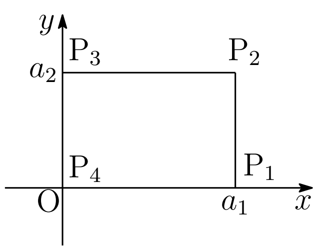
$$\sum_{k=-(N+1)}^{N+1} (N - |k|)^2 = N^2 + 2\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)^2 = N^2 + 2\sum_{k=1}^{N-1} k^2$$

$$= N^2 + 2 \cdot \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$$

$$= \frac{1}{3}N(2N^2+1)$$

よって，求める確率は　$\dfrac{\frac{1}{3}N(2N^2+1)}{N^4} = \boldsymbol{\dfrac{2N^2+1}{3N^3}}$

(4) $\mathrm{P}_1(a_1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(a_1,\ a_2)$．P_4 が原点に一致するとき，$a_1 - a_3 = 0$ より，$\mathrm{P}_3(0,\ a_2)$．ゆえに，四角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ は右の図のようになる．この四角形の面積が $2^m\ (= N)$ となるとき



$$(a_1,\ a_2) = (2^j,\ 2^{m-j}) \quad (j = 0, 1, 2, \cdots, m)$$

よって，求める確率は　$\dfrac{m+1}{N^4} = \dfrac{m+1}{(2^m)^4} = \boldsymbol{\dfrac{m+1}{2^{4m}}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 与えられた関数 $f(x)$ から

$$f(x) = (1-x)\cos x + x\sin x - e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt \quad \cdots (*)$$

これに $x=0$ を代入すると　　$\boldsymbol{f(0) = 1}$

$(*)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)\cos x + x\sin x - e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt - e^x \cdot e^{-x} f(x) \\ &= (x-1)\cos x + x\sin x - e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt - f(x) \end{aligned}$$

上式および $(*)$ から $f(x)$ を消去すると　$f'(x) = 2(x-1)\cos x$

(2) (1) の結果から

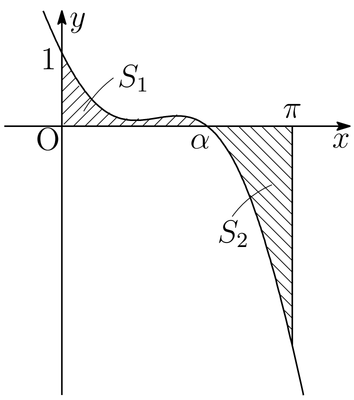
$$f(x) = \int 2(x-1)\cos x\,dx = 2(x-1)\sin x + 2\cos x + C$$

$f(0) = 1$ より　$2 + C = 1$　ゆえに　$C = -1$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = 2(x-1)\sin x + 2\cos x - 1}$

(3) (1)，(2) の結果から

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(\frac{\pi}{2})$	$\searrow$	-3



$1 < \dfrac{\pi}{3}$ であるから，$\cos 1 > \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ より

$$f(1) = 2\cos 1 - 1 > 0$$

よって，方程式 $f(x) = 0$ は，$0 < x < \pi$ の範囲にただ一つの解をもつ．

(4) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x)\,dx &= \int_0^\pi \{2(x-1)\sin x + 2\cos x - 1\}\,dx \\ &= \Big[-2(x-1)\cos x + 4\sin x - x\Big]_0^\pi = \pi - 4 < 0 \end{aligned}$$

$S_1 = \displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,dx$，$S_2 = -\displaystyle\int_\alpha^\pi f(x)\,dx$ であるから

$$S_1 - S_2 = \int_0^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\pi f(x)\,dx = \int_0^\pi f(x)\,dx < 0$$

よって　　$\boldsymbol{S_1 < S_2}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $w=(z+1)^2-2i$ であるから，$z=x+yi$ とすると

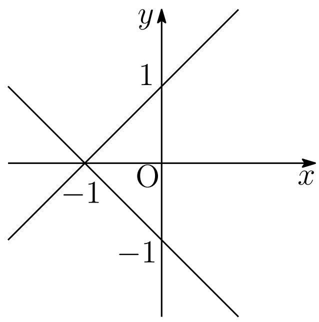
$$\begin{aligned} w &= (x+yi+1)^2-2i=(x+1)^2+2(x+1)yi-y^2-2i \\ &= (x+1)^2-y^2+2\{(x+1)y-1\}i \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

w の実部が 0 のとき，$(*)$ より

$$(x+1)^2-y^2=0$$

したがって　　$y=\pm(x+1)$

よって，z の表す図形は右の図のとおり．



(2) $w=0$ のとき，$(*)$ より $\begin{cases} (x+1)^2-y^2=0 \\ (x+1)y-1=0 \end{cases}$

第 1 式から，次の場合分けを行う．

(i) $y=x+1$ のとき，これを第 2 式に代入して

$(x+1)^2-1=0$　ゆえに　$x(x+2)=0$　これを解いて　$x=0,-2$

したがって　$x=0$ のとき $y=1$，$x=-2$ のとき $y=-1$

(ii) $y=-(x+1)$ のとき，これを第 2 式に代入して

$$-(x+1)^2-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)^2=-1$$

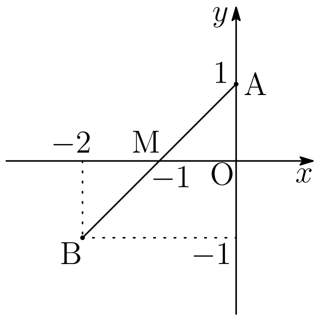
これを満たす実数 x は存在しない．

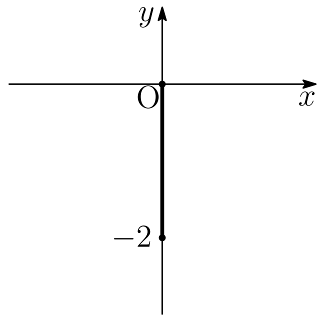
(i)，(ii) より，求める複素数は　　$\boldsymbol{i,\ -2-i}$

(3) 条件より，A(i)，B$(-2-i)$ であり，線分 AB の中点は M(-1)
線分 AM 上 (両端を含む) の点 $x+yi$ は $y=x+1$ $(-1 \leqq x \leqq 0)$ であるから，これを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} w &= (x+1)^2-(x+1)^2+2\{(x+1)(x+1)-1\}i \\ &= \{2(x+1)^2-2\}i \end{aligned}$$

$-1 \leqq x \leqq 0$ より，$-2 \leqq 2(x+1)^2-2 \leqq 0$ であるから，w は，右下の図のように，虚軸上の 2 点 $-2i$ と 0 を結ぶ線分 (両端を含む) 上を動く．





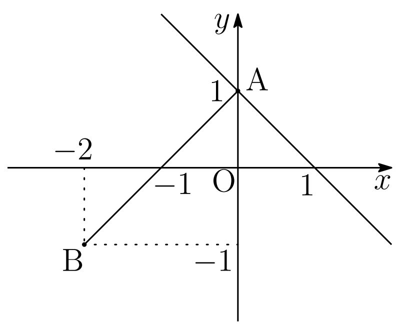
(4) 点 z が，点 A を通り線分 AB に垂直な直線 $y=-x+1$ 上を動くとき，これを $(*)$ に代入して

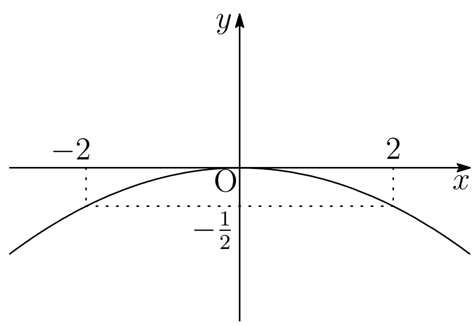
$$\begin{aligned} w &= (x+1)^2-(-x+1)^2+2\{(x+1)(-x+1)-1\}i \\ &= 4x-2x^2i \end{aligned}$$

上式において，x を $\dfrac{x}{4}$ に置き換えると

$$w = 4\cdot\frac{x}{4}-2\left(\frac{x}{4}\right)^2 i = x-\frac{x^2}{8}i$$

よって，複素数平面上の点 $z=x+yi$ は，右下の図のように放物線 $y=-\dfrac{x^2}{8}$ 上を動く．





$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 3 点 A$(0,\ 3)$，B$(0, -1)$，P$(t,\ 0)$ $(t>0)$ により

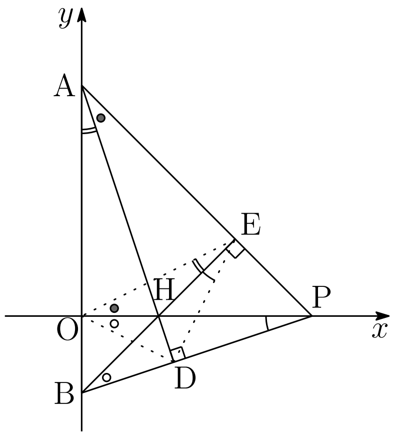
$$\text{直線 AP の傾きは}\ -\frac{3}{t},\qquad \text{直線 BP の傾きは}\ \frac{1}{t}$$

2 直線 AP，BP は直交するから　$-\frac{3}{t}\cdot\frac{1}{t}=-1$　よって　$\boldsymbol{t=\sqrt{3}}$

(2) 直線 BE は点 B$(0, -1)$ を通り，傾き $\frac{t}{3}$ であるから (直線 AP に垂直)

$$y=\frac{t}{3}x-1\quad \text{ゆえに}\quad y=\frac{t}{3}\left(x-\frac{3}{t}\right)\quad \text{よって}\quad \mathbf{H}\left(\boldsymbol{\frac{3}{t},\ 0}\right)$$

(3) 四角形 AOHE，四角形 OBDH，四角形 HDPE は，それぞれ対角の和が 180° であるから，円に内接する．



四角形 AOHE において　$\angle\mathrm{EOH}=\angle\mathrm{EAH}$

$\angle\mathrm{OEH}=\angle\mathrm{OAH}$

四角形 OBDH において　$\angle\mathrm{HOD}=\angle\mathrm{HBD}$

四角形 HDPE において　$\angle\mathrm{HED}=\angle\mathrm{HPD}$

$\triangle\mathrm{AHE}\backsim\triangle\mathrm{BHD}$ より　$\angle\mathrm{EAH}=\angle\mathrm{HBD}$

$\triangle\mathrm{AHO}\backsim\triangle\mathrm{PHD}$ より　$\angle\mathrm{OAH}=\angle\mathrm{HPD}$

上の第 1，第 3，第 5 式から

$$\angle\mathrm{EOH}=\angle\mathrm{HOD}\quad\cdots①$$

同様に，上の第 2，第 4，第 6 式から

$$\angle\mathrm{OEH}=\angle\mathrm{HED}\quad\cdots②$$

①，② より，$\triangle$ODE において，線分 OH，EH は，それぞれ $\angle$O，$\angle$E の二等分線である．よって，点 H は $\triangle$ODE の内心である．

(4) 点 E は，直線 AP : $y=-\frac{3}{t}x+3$ と (2) の直線 $y=\frac{t}{3}x-1$ 交点である．

これらの連立方程式を解くと　$\mathrm{E}\left(\frac{12t}{t^2+9},\ \frac{3t^2-9}{t^2+9}\right)$

ゆえに，直線OEの方程式は　$y=\frac{3t^2-9}{12t}x$　すなわち　$(t^2-3)x-4ty=0$

$\triangle$ODE の内接円の半径 $f(t)$ は，点 $\mathrm{H}\left(\frac{3}{t},\ 0\right)$ から直線 OE までの距離であるから $(t>\sqrt{3})$

$$f(t)=\frac{\left|(t^2-3)\cdot\frac{3}{t}-4t\cdot 0\right|}{\sqrt{(t^2-3)^2+(-4t)^2}}=\boldsymbol{\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}}$$

(5) (4) の結果から

$$f(t)^2 = \frac{9(t^2-3)^2}{t^2\{(t^2-3)^2+16t^2\}}$$

$t > \sqrt{3}$ より，$t^2 - 3 = \dfrac{1}{u}$ とおくと $(u > 0)$

$$f(t)^2 = \frac{9\left(\frac{1}{u}\right)^2}{\left(\frac{1}{u}+3\right)\left\{\left(\frac{1}{u}\right)^2+16\left(\frac{1}{u}+3\right)\right\}} = \frac{9}{\left(\frac{1}{u}+3\right)\{1+16u(1+3u)\}}$$

$g(u) = \left(\frac{1}{u}+3\right)\{1+16u(1+3u)\}$ とおくと $(u > 0)$

$$g(u) = 144u^2 + 96u + 19u + \frac{1}{u}$$
$$g'(u) = 288u + 96 - \frac{1}{u^2}$$
$$g''(u) = 288 + \frac{2}{u^3} > 0$$

$g'(u)$ は単調増加，$\displaystyle\lim_{u\to+0} g'(u) < 0$，$\displaystyle\lim_{u\to\infty} g'(u) > 0$

したがって，$g'(u) = 0$ を満たす u_0 が唯一存在する．

u	(0)	$\cdots$	u_0	$\cdots$
$g'(u)$		$-$	0	$+$
$g(u)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

ゆえに，$g(u)$ は最小値 $g(u_0)$ をとる．

よって，$t = \sqrt{3 + \dfrac{1}{u_0}}$ のとき $f(t)$ は最大値をとる．