平成30年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

1 次の問いに答えよ．

(1) 次の条件 (A) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(A) 2次式 $t^2 - ut + v$ は，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2 - ut + v = (t-x)(t-y)$ と因数分解される．

(2) 次の条件 (B) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(B) 2次式 $t^2 - ut + v$ は，$0 \leqq x \leqq 1$，$1 \leqq y \leqq 2$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2 - ut + v = (t-x)(t-y)$ と因数分解される．

(3) 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が4点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ．

2 複素数平面上の4点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) を頂点とする四角形 ABCD を考える．ただし，四角形ABCDは，すべての内角が 180° より小さい四角形 (凸四角形) であるとする．また，四角形ABCDの頂点は反時計回りにA，B，C，Dの順に並んでいるとする．四角形ABCDの外側に，4辺AB，BC，CD，DAをそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形APB，BQC，CRD，DSAを作る．次の問いに答えよ．

(1) 点Pを表す複素数を求めよ．

(2) 四角形PQRSが平行四辺形であるための必要十分条件は，四角形ABCDがどのような四角形であることか答えよ．

(3) 四角形PQRSが平行四辺形であるならば，四角形PQRSは正方形であることを示せ．

3 次の問いに答えよ．

(1) すべての実数 t に対し，$1 + t \leqq e^t$ が成り立つことを示せ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ の値を求めよ．

(3) 次の不等式を示せ．

$$\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq 2 - \sqrt{2}$$

4 0，1，2，3 の数字が一つずつ書かれた 4 枚のカードがある．この中から 1 枚を取り出し，書かれた数字を見て元に戻す．この操作を N 回繰り返し，カードに書かれた数字を順に Z_1，Z_2，$\cdots$，Z_n とする．ここで，N は 3 以上の自然数である．さらに，複素数

$$\alpha = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$$

を用いて，項数 N の数列 $\{X_n\}$ を

$$X_1 = \alpha^{Z_1}, \quad X_{n+1} = X_n \alpha^{Z_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \cdots, N-1)$$

により定める．$n = 1, 2, \cdots, N$ に対し，$X_n = \alpha$ となる確率を P_n とし，$X_n = \alpha^2$ となる確率を Q_n とする．次の問いに答えよ．

(1) P_1 を求めよ．

(2) $n = 1, 2, \cdots, N-1$ とする．$\alpha^{Z_{n+1}} = 1$ となる確率を求めよ．

(3) $n = 1, 2, \cdots, N$ とする．$X_n = 1$ となる確率を，P_n と Q_n を用いて表せ．

(4) $n = 1, 2, \cdots, N-1$ に対し，P_n を用いて P_{n+1} を表せ．

(5) $n = 1, 2, \cdots, N$ に対し，P_n を求めよ．

5 座標平面上で，曲線 $C : y = x^3 - 3x$ と，$b > a^3 - 3a$ を満たすように動く点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を考える．また，点 P に対し，二つの不等式

$$|x - a| \leqq 1, \quad |y - b| \leqq 1$$

によって表される座標平面上の領域を B とする．領域 B と曲線 C に対して，B と C が共有点 Q をもち，さらに B と C の共有点が B の境界線上にしかないとき，B と C は点 Q で接するということにする．次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の概形をかき，さらに点 P の座標が $(-2,\ 3)$ のときの領域 B を図示せよ．

(2) B と C が $x < -1$ の範囲にある点で接するように，点 P は動くとする．このときの点 P の軌跡を求めよ．

(3) B と C がある点で接するように点 P は動くとする．このときの点 P の軌跡を求めよ．

(4) (3) の点 P の軌跡は，ある関数 $y = f(x)$ のグラフで表すことができる．この $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ．

解答例

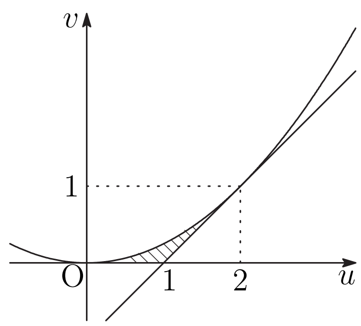
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(t)=t^2-ut+v$ とおくと　$f(t)=\left(t-\dfrac{u}{2}\right)^2+v-\dfrac{u^2}{4}$

2 次方程式 $f(t)=0$ の実数解 x, y が $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$ を満たすから, $f(0)\geqq 0$, $f(1)\geqq 0$ および上式より

$$v\geqq 0,\quad 1-u+v\geqq 0,\quad 0\leqq \frac{u}{2}\leqq 1,\quad v-\frac{u^2}{4}\leqq 0$$

これらを整理すると

$$\left\{\begin{array}{l} 0\leqq u\leqq 2 \\ v\geqq 0 \\ v\geqq u-1 \\ v\leqq \dfrac{u^2}{4} \end{array}\right.$$



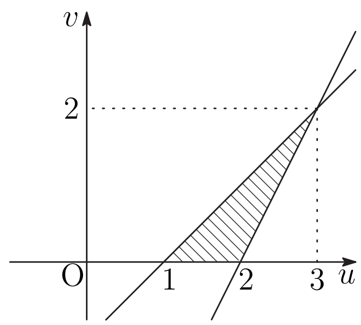
よって, 求める領域は, 右の図の斜線部分で境界を含む.

(2) 2 次方程式 $f(t)=0$ の実数解 x, y が $0\leqq x\leqq 1\leqq y\leqq 2$ を満たすから, $f(0)\geqq 0$, $f(1)\leqq 0$, $f(2)\geqq 0$ より

$$v\geqq 0,\quad 1-u+v\leqq 0,\quad 4-2u+v\geqq 0$$

これらを整理すると

$$\left\{\begin{array}{l} v\geqq 0 \\ v\leqq u-1 \\ v\geqq 2u-4 \end{array}\right.$$



よって, 求める領域は, 右の図の斜線部分で境界を含む.

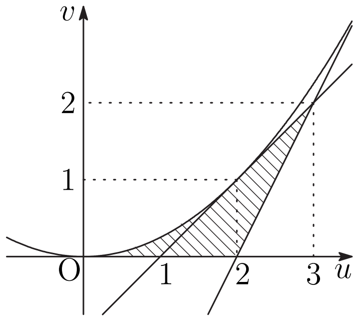
(3) $A=\{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$，$B=\{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1 \leqq y \leqq 2\}$ とすると，$(x,\ y)$ が 4 点 $(0,0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部は $A \cup B$ である．(1)，(2) で求めた領域をそれぞれ E，F とすると

点 $(x+y,\ xy)$　すなわち　点 $(u,\ v)$

の表す領域は $E \cup F$ で，右の図のようになる．

よって，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^2 \frac{u^2}{4}\,du+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$
$$=\left[\frac{u^3}{12}\right]_0^2+\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{7}{6}}$$



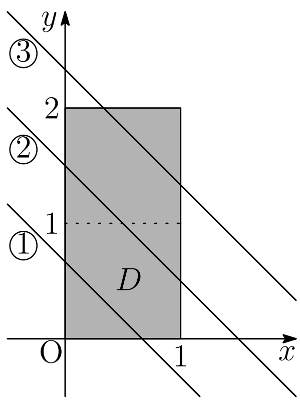
別解 $D=\{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2\}$ とし，直線 $x+y=u$ 上の点 $(x,\ y) \in D$ における $v=xy$ のとる値の範囲を求める．

$$v=x(u-x)=-\left(x-\frac{u}{2}\right)^2+\frac{u^2}{4}$$

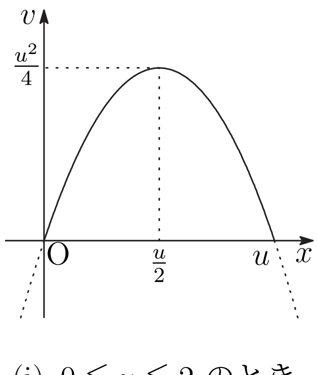
① $0 \leqq u \leqq 1$ のとき　$0 \leqq x \leqq u$

② $1 \leqq u \leqq 2$ のとき　$0 \leqq x \leqq 1$

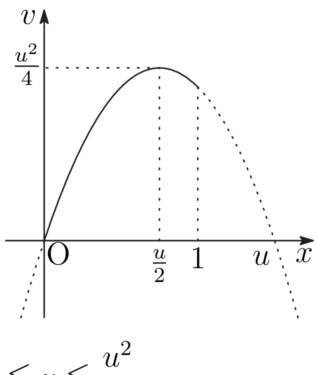
③ $2 \leqq u \leqq 3$ のとき　$u-2 \leqq x \leqq 1$



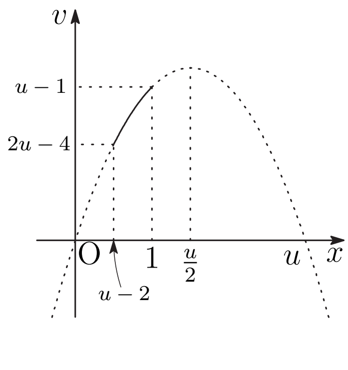
① $0 \leqq u \leqq 1$



② $1 \leqq u \leqq 2$



③ $2 \leqq u \leqq 3$

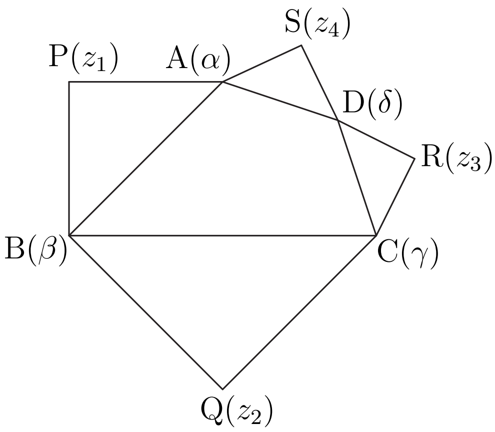


(i) $0 \leqq u \leqq 2$ のとき　$0 \leqq v \leqq \dfrac{u^2}{4}$

(ii) $2 \leqq u \leqq 3$ のとき　$2u-4 \leqq v \leqq u-1$

よって　$S=\displaystyle\int_0^2 \frac{u^2}{4}\,du+\int_2^3 \{(u-1)-(2u-4)\}\,du=\frac{7}{6}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\mathrm{P}(z_1)$ とすると



$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BA}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \angle\alpha\beta z_1 = \frac{\pi}{4}$$

したがって

$$\frac{z_1-\beta}{\alpha-\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ゆえに　$z_1 - \beta = \dfrac{1}{2}(1+i)(\alpha-\beta)$

よって　$z_1 = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}(1+i)\alpha + \dfrac{1}{2}(1-i)\beta}$

(2) $\mathrm{Q}(z_2)$，$\mathrm{R}(z_3)$，$\mathrm{S}(z_4)$ とおくと，(1) と同様にして

$$z_2 = \frac{1}{2}(1+i)\beta + \frac{1}{2}(1-i)\gamma, \quad z_3 = \frac{1}{2}(1+i)\gamma + \frac{1}{2}(1-i)\delta$$
$$z_4 = \frac{1}{2}(1+i)\delta + \frac{1}{2}(1-i)\alpha$$

ゆえに

$$\begin{aligned}-z_1+z_2-z_3+z_4 &= \frac{1}{2}(1+i)(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)\\ &\quad +\frac{1}{2}(1-i)(-\beta+\gamma-\delta+\alpha)\\ &= i(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)\end{aligned}$$

したがって　$-z_1+z_2-z_3+z_4=0 \iff -\alpha+\beta-\gamma+\delta=0$

すなわち　$z_2-z_1 = z_3-z_4 \iff \beta-\alpha=\gamma-\delta$

よって，四角形 ABCD が平行四辺形であることは四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件である．

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるから，(2) の結果より，$\delta-\gamma=\alpha-\beta$

$$\begin{aligned}z_1-z_2 &= \frac{1}{2}(1+i)(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}(1-i)(\beta-\gamma),\\ z_3-z_2 &= \frac{1}{2}(1+i)(\gamma-\beta) + \frac{1}{2}(1-i)(\delta-\gamma)\\ &= \frac{1}{2}(1+i)(\gamma-\beta) + \frac{1}{2}(1-i)(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

したがって　$i(z_3-z_2) = \dfrac{1}{2}(i-1)(\gamma-\beta) + \dfrac{1}{2}(i+1)(\alpha-\beta) = z_1-z_2$

上式から　$\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_2} = i$　ゆえに　$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}$，$\angle\mathrm{PQR}=90^\circ$

四角形 PQRS は平行四辺形でもあるから，四角形 PQRS は正方形である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(t)=e^t-1-t$ とおくと　$f'(t)=e^t-1$

t	$\cdots$	0	$-$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって，すべての実数 t に対し，次式が成立する．

$$e^t-1-t \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 1+t \leqq e^t \qquad \cdots(*)$$

(2) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) dx$$
$$= \Big[\ \tan x - \frac{1}{\cos x}\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \mathbf{2-\sqrt{2}}$$

(3) $(*)$ より　$1-t \leqq e^{-t}$

$t>-1$ のとき，$1+t>0$ であるから，$(*)$ より　$e^{-t} \leqq \dfrac{1}{1+t}$

したがって，$t>-1$ のとき　$1-t \leqq e^{-t} \leqq \dfrac{1}{1+t} \qquad \cdots(**)$

$t=\sin x\ (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4})$ とすると，$(**)$ を満たすから

$$1-\sin x \leqq e^{-\sin x} \leqq \frac{1}{1+\sin x}$$

したがって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin x)\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

このとき　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin x)\,dx = \Big[\ x+\cos x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

(1) および上の結果から

$$\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq 2-\sqrt{2}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $X_1=\alpha$，すなわち，$Z_1=1$ となる確率であるから $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

(2) $\alpha^{Z_{n+1}}=1$，すなわち，$Z_{n+1}=0,\ 3$ となる確率であるから $\frac{2}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(3) $X_n=1$ となる確率を R_n とすると $P_n+Q_n+R_n=1 \quad \cdots(*)$

よって $R_n=\boldsymbol{1-P_n-Q_n}$

(4) 条件により，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned} P_{n+1}&=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}Q_n+\frac{1}{4}R_n\\ Q_{n+1}&=\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{2}Q_n+\frac{1}{4}R_n\\ R_{n+1}&=\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{4}Q_n+\frac{1}{2}R_n \end{aligned}$$

上の第 2 式と第 3 式の辺々を加えると

$$Q_{n+1}+R_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{3}{4}(Q_n+R_n)$$

$(*)$ より，$Q_n+R_n=1-P_n$ であるから，これを上式に代入すると

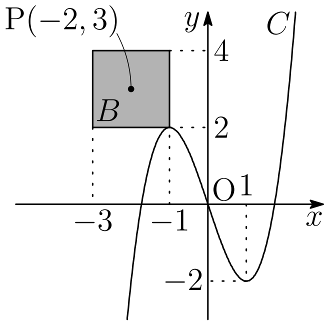
$$1-P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{3}{4}(1-P_n) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{P_{n+1}=\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{4}}$$

(5) (4) の結果から $P_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$

ゆえに $P_n-\frac{1}{3}=\left(P_1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

(1) の結果を代入して $\boldsymbol{P_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $y = x^3 - 3x$ より



$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

曲線 C の概形は右の図のようになる．

P が $(-2,\ 3)$ のとき，領域 B は　　$|x+2| \leqq 1,\ \ |y-3| \leqq 1$

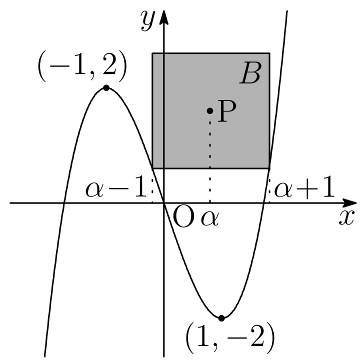
よって，右の図のようになる．

(2) $g(x) = x^3 - 3x$ とおくと，P は $C : y = g(x)$ $(x < -1)$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものであるから

$$y = g(x+1) + 1 \quad (x+1 < -1)$$

よって　　$\boldsymbol{y = x^3 + 3x^2 - 1 \quad (x < -2)}$

(3) 右の図のように B と C が 2 点で接するときの P の x 座標を α とすると



$$g(\alpha-1) = g(\alpha+1)$$

$(\alpha-1)^3 - 3(\alpha-1) + 1 = (\alpha+1)^3 - 3(\alpha+1) + 1$

整理すると　　$3\alpha^2 - 2 = 0$

このとき，$\alpha > 0$ であることに注意して

$$\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$g(x) = x^3 - 3x$ とおくと，点 P の軌跡の方程式は

$$y = \begin{cases} g(x+1)+1 & (x < -2) \\ 3 & (-2 \leqq x \leqq 0) \\ g(x-1)+1 & (0 < x \leqq \alpha) \\ g(x+1)+1 & (\alpha < x) \end{cases}$$

よって

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 1 & (x < -2) \\ 3 & (-2 \leqq x \leqq 0) \\ x^3 - 3x^2 + 3 & (0 < x \leqq \frac{\sqrt{6}}{3}) \\ x^3 + 3x^2 - 1 & (\frac{\sqrt{6}}{3} < x) \end{cases}}$$

(4) (3) の結果から

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 1 & (x < -2) \\ 3 & (-2 \leqq x \leqq 0) \\ x^3 - 3x^2 + 3 & (0 < x \leqq \frac{\sqrt{6}}{3}) \\ x^3 + 3x^2 - 1 & (\frac{\sqrt{6}}{3} < x) \end{cases}$$

したがって $\displaystyle \lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{3 - 3}{x} = 0,$

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{(x^3 - 3x^2 + 3) - 3}{x} = 0$$

ゆえに $\displaystyle f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$

よって，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である．

補足 $f(x)$ は微分可能 (C^1級) である．

実際，$f(x) = 3$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$，$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ $(0 \leqq x < \frac{\sqrt{6}}{3})$ より

$$f''(x) = 0 \quad (-2 < x < 0), \quad f''(x) = 6x - 6 \quad \left(0 < x < \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$\displaystyle \lim_{x \to -0} f''(x) = 0$，$\displaystyle \lim_{x \to +0} f''(x) = -6$ より，C^2 級ではない．