平成29年度　広島大学　２次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・医・歯・薬・教育(自然系・理数系)・
総合学科(理科系)・生物生産

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \tan\frac{\pi}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．次の問いに答えよ．

(1) $a_2 = \tan\dfrac{\pi}{6}$，$a_3 = \tan\dfrac{\pi}{12}$ であることを示せ．

(2) 一般項 a_n の表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n a_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a > 0$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(t) = t^3 - 2at + 1$ の区間 $t \geqq 0$ における最小値を，a を用いて表せ．

(2) (1) で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく．A^3 を求めよ．

(3) 座標平面上の曲線 $y = x^4$ を C_1，点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする．C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ．

(4) 座標平面において，点 P が曲線 $y = x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0,\ a)$ の距離の最小値を考える．その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある．ただし，$0<p<1$ である．このとき，下図のような正三角形の 3 頂点 A，B，C を次の規則で移動する動点 R を考える．

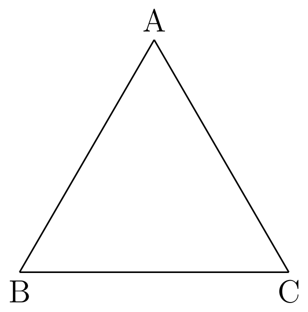
> コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し，裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する．

R は最初 A にあり，全部で $(2N+3)$ 回移動する．ここで，N は自然数である．移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k $(k=2,3,\cdots,2N+3)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) P_2，P_3 を求めよ．

(2) P_{2m}，P_{2m+1} $(2 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ．

(3) $p=\dfrac{1}{2}$ とする．移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ．

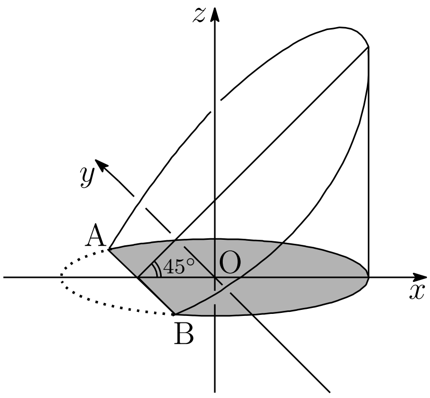


$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標空間内の平面 $H : z = 0$ とその上の曲線 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を考える．C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする．C 上の 2 点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(-1, -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ に対し，線分 AB を含み平面 H と 45° の角をなす平面を T とする．ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする．平面 H，平面 T および曲面 K が囲む二つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする．次の問いに答えよ．

(1) 立体 V と平面 H の共通部分 (下図の灰色で示される部分) の面積を求めよ．

(2) 立体 V を平面 $x = t\ (-1 < t < 2)$ で切ったとき，断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ．

(3) 立体 V の体積を求めよ．



$\boxed{\mathbf{5}}$ x 座標，y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ．格子点 O(0, 0) および A(50, 14) を考える．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$ を満たす格子点 P を一つ求めよ．

(2) m を自然数とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$ を満たす格子点 P のうち，長さ OP が m 番目に小さい点を P_m とする．P_1 および P_2 を求めよ．

(3) P_m を (2) で定めた格子点とする．自然数 k に対し，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}}$ を成分表示せよ．

(4) P_m を (2) で定めた格子点とする．Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}$ を満たす点とする．四角形 $\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$ の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a_n = \tan\theta_n \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}\right) \cdots (*)$ とおくと

$$a_1 = \tan\frac{\pi}{3} \text{ より} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{3} \quad \cdots ①$$

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1}$ より

$$\begin{aligned}\tan\theta_{n+1} &= \frac{\tan\theta_n}{\sqrt{\tan^2\theta_n+1}+1} = \frac{\sin\theta_n}{1+\cos\theta_n}\\ &= \frac{2\sin\dfrac{\theta_n}{2}\cos\dfrac{\theta_n}{2}}{2\cos^2\dfrac{\theta_n}{2}} = \frac{\sin\dfrac{\theta_n}{2}}{\cos\dfrac{\theta_n}{2}} = \tan\frac{\theta_n}{2}\end{aligned}$$

ゆえに $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2} \quad \cdots ②$ すなわち $\theta_n = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{\pi}{3{\cdot}2^{n-1}} \quad \cdots (**)$

したがって $a_n = \tan\dfrac{\pi}{3{\cdot}2^{n-1}}$ よって $a_2 = \tan\dfrac{\pi}{6}$，$a_3 = \tan\dfrac{\pi}{12}$

(2) $(*)$ を用いて，a_n は $(**)$ であると推定する．

［1］$n=1$ のとき，① より，$(**)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(**)$ が成立する，

すなわち，$\theta_k = \dfrac{\pi}{3{\cdot}2^{k-1}}$ と仮定すると，② より

$$\theta_{k+1} = \frac{1}{2}\theta_k = \frac{1}{2}{\cdot}\frac{\pi}{3{\cdot}2^{k-1}} = \frac{\pi}{3{\cdot}2^k}$$

したがって，$n=k+1$ のときも $(**)$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(**)$ は成立する．

よって $a_n = \tan\dfrac{\pi}{3{\cdot}2^{n-1}}$

(3) $(**)$ より，$2^n = \dfrac{2\pi}{3\theta_n}$ であるから $2^n a_n = \dfrac{2\pi}{3\theta_n}\tan\theta_n = \dfrac{2\pi}{3}{\cdot}\dfrac{\tan\theta_n}{\theta_n}$

$n \longrightarrow \infty$ のとき，$\theta_n \longrightarrow +0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} 2^n a_n = \lim_{\theta_n\to+0}\frac{2\pi}{3}{\cdot}\frac{\tan\theta_n}{\theta_n} = \boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(t)=t^3-2at+1\ (a>0)$ より

$$f'(t)=3t^2-2a=3\left(t+\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)\left(t-\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)$$

$t \geqq 0$ における $f(t)$ 増減表は

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2a}{3}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	1	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，最小値は $f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{2a}{3}}-2a\sqrt{\frac{2a}{3}}+1=\boldsymbol{-\frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2a}{3}}+1}$

(2) $a=A$ のとき，最小値が 0 であるから，(1) の結果より

$$-\frac{4A}{3}\sqrt{\frac{2A}{3}}+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{4A}{3}\sqrt{\frac{2A}{3}}=1$$

両辺を平方すると $\frac{16A^2}{9}\cdot\frac{2A}{3}=1$ よって $\boldsymbol{A^3=\frac{27}{32}}$

(3) $C_1: y=x^4$，$C_2: x^2+(y-a)^2=a^2$ から y を消去すると

$$x^2+(x^4-a)^2=a^2 \quad \text{整理すると} \quad x^2(x^6-2ax^2+1)=0 \quad \cdots(*)$$

C_1 と C_2 の共有点の個数は，方程式 $(*)$ の実数解の個数に等しい．
$t=x^2\cdots$① とおくと，上の方程式は $tf(t)=0 \quad \cdots(**)$

(1) の結果を利用すると，$f(t)=0\ (t \geqq 0)$ の解の個数は，次のようになる．

$f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)>0$，すなわち，$0<a<\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}$ のとき　0 個

$f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)=0$，すなわち，$a=\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}$ のとき　1 個

$f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)<0$，すなわち，$\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}<a$ のとき　2 個

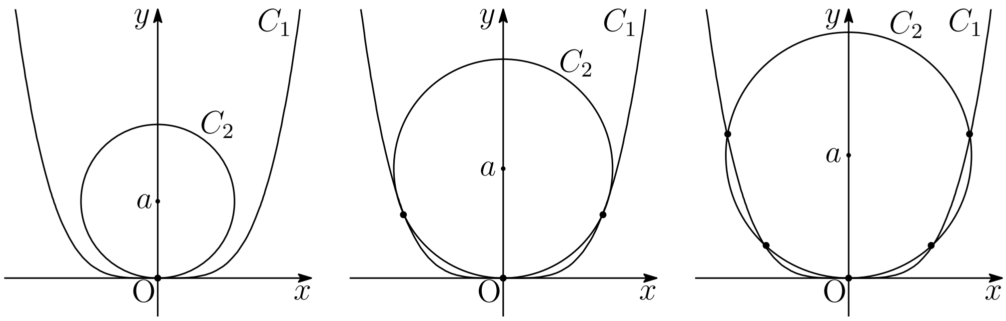
① より，これらの正の解 t に対し，$(*)$ の解はそれぞれ $x=\pm\sqrt{t}$ である．

$(*)$，$(**)$ より　$\boldsymbol{0<a<\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}}$ のとき　**1 個**

$\boldsymbol{a=\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}}$ のとき　**3 個**

$\boldsymbol{\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}<a}$ のとき　**5 個**

補足 a の値による C_1 と C_2 の共有点は次のようになる．



共有点 1 個 $(a < A)$　　共有点 3 個 $(a = A)$　　共有点 5 個 $(a > A)$

(4) C_1 上の点 $(x,\ x^4)$ と点 $(0,\ a)$ 間の距離を d とすると

$$d^2 = x^2 + (x^4 - a)^2 = x^8 - 2ax^4 + x^2 + a^2$$

d の最小値が a であるとき，$d^2 \geqq a^2$ であるから

$$x^8 - 2ax^4 + x^2 + a^2 \geqq a^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2(x^6 - 2ax^2 + 1) \geqq 0$$

上式が常に成り立つとき，任意の x に対して

$$x^6 - 2ax^2 + 1 \geqq 0$$

が成立する a の範囲であるから，$t = x^2$ とおくと，$t \geqq 0$ において，常に

$$f(t) \geqq 0$$

を満たす a の範囲である．

したがって，(1) の結果から $f\left(\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\right) \geqq 0$ を満たす a の範囲は $(a > 0)$

$$-\frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2a}{3}} + 1 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \leqq \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{0 < a \leqq \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) P_2 は，A $\to$ B $\to$ A または A $\to$ C $\to$ A と移動する確率より

$$P_2 = p(1-p) + (1-p)p = \boldsymbol{2p(1-p)}$$

P_3 は，A $\to$ B $\to$ C $\to$ A または A $\to$ C $\to$ B $\to$ A と移動する確率より

$$P_3 = \boldsymbol{p^3 + (1-p)^3}$$

(2) 移動回数がちょうど $2m$ に達したとき，R が A に初めて戻る場合，最初に A $\to$ B と移動し BC 間を $m-1$ 回往復して最後に B $\to$ A と移動するか，最初に A $\to$ C と移動し CB 間を $m-1$ 回往復して最後に C $\to$ A と移動する確率であるから

$$\begin{aligned} P_{2m} &= p\{p(1-p)\}^{m-1}(1-p) + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}p \\ &= \boldsymbol{2\{p(1-p)\}^m} \end{aligned}$$

移動回数がちょうど $2m+1$ に達したとき，R が A に初めて戻る場合，最初に A $\to$ B と移動し BC 間を $m-1$ 回往復して最後に B $\to$ C $\to$ A と移動するか，最初に A $\to$ C と移動し CB 間を $m-1$ 回往復して最後に C $\to$ B $\to$ A と移動する確率であるから

$$\begin{aligned} P_{2m+1} &= p\{p(1-p)\}^{m-1}p^2 + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}(1-p)^2 \\ &= \boldsymbol{\{p^3 + (1-p)^3\}\{p(1-p)\}^{m-1}} \end{aligned}$$

(3) $p = \dfrac{1}{2}$ のとき　$p(1-p) = \dfrac{1}{4}$,　$p^3 + (1-p)^3 = \dfrac{1}{4}$

$q = \dfrac{1}{4}$ とおくと，(2) の結果から　$P_{2m} = 2q^m$,　$P_{2m+1} = q{\cdot}q^{m-1} = q^m$

移動回数が $2k$ $(1 \leqq k \leqq N)$ のとき R が A に初めて戻り，$2N+3$ 回目に R が A に 2 度目に戻る確率は

$$P_{2k}P_{2(N-k+1)+1} = 2q^k{\cdot}q^{N-k+1} = 2q^{N+1}$$

移動回数が $2k+1$ $(1 \leqq k \leqq N)$ のとき R が A に初めて戻り，$2N+3$ 回目に R が A に 2 度目に戻る確率は

$$P_{2k+1}P_{2(N-k+1)} = q^k{\cdot}2q^{N-k+1} = 2q^{N+1}$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N}\{P_{2k}P_{2(N-k+1)+1} + P_{2k+1}P_{2(N-k+1)}\} &= \sum_{k=1}^{N}(2q^{N+1} + 2q^{N+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} q^N = Nq^N = \boldsymbol{\frac{N}{4^N}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ より，求める面積を S とすると　$S=2\displaystyle\int_{-1}^{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx$

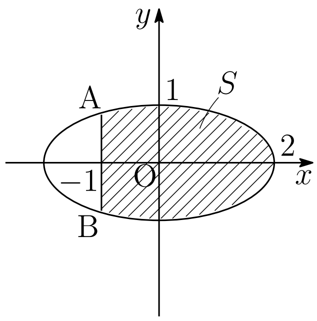
$x=2\cos\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$

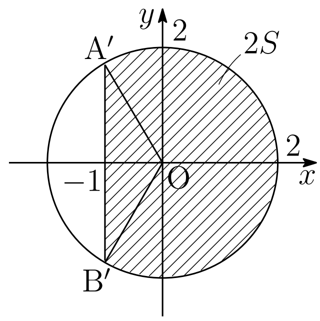
x	$-1 \longrightarrow 2$
θ	$\frac{2}{3}\pi \longrightarrow 0$

よって
$$S=2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{0}\sqrt{1-\cos^2\theta}(-2\sin\theta)\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}4\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}(2-2\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$=\Big[\,2\theta-\sin 2\theta\,\Big]_0^{\frac{2\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

別解 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸を元に y 軸方向に 2 倍に拡大したものは，中心が原点で半径 2 の円．このとき，2 点 A$\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，B$\left(-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ が移動した点をそれぞれ A$'(-1,\ \sqrt{3})$，B$'(-1,-\sqrt{3})$ とおくと，$\angle\mathrm{A'OB}=\dfrac{2\pi}{3}$

$$2S=\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{4\pi}{3}=\sqrt{3}+\frac{8\pi}{3}\quad \text{よって}\quad S=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4\pi}{3}$$





(2) 平面 $x=t\ (-1<t<2)$ と楕円柱面 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ との交点の y 座標は

$$\frac{t^2}{4}+y^2=1\quad \text{ゆえに}\quad y=\pm\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}$$

平面 $x=t\ (-1<t<2)$ と平面 $T: z=x+1$ との交点の z 座標は　$z=t+1$

V を平面 $x=t\ (-1<t<2)$ で切った断面は，底面 $2\sqrt{1-\dfrac{t^2}{4}}$，高さ $t+1$ の長方形であるから

$$\boldsymbol{S(t)=2(t+1)\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}}$$

(3) V の体積は，(2) の結果および (1) で求めた定積分に注意して

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} S(t)\,dt &= \int_{-1}^{2} 2t\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}dt + 2\int_{-1}^{2}\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\,dt \\ &= \left[-\frac{8}{3}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{2} + S \\ &= \sqrt{3} + \left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{4\pi}{3}+\frac{3\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) O(0, 0)，A(50, 14) より，P(x, y) とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$ より

$$50x + 14y = 6 \quad \text{ゆえに} \quad 25x + 7y = 3 \quad \cdots①$$

x，y は整数であるから，$25 \equiv 4 \pmod 7$ より，① は

$$4x \equiv 3 \quad \text{ゆえに} \quad 8x \equiv 6 \quad \text{すなわち} \quad x \equiv -1 \pmod 7$$

整数 k を用いて，$x = 7k-1$ とおき，これを ① に代入すると

$$25(7k-1) + 7y = 3 \quad \text{ゆえに} \quad y = -25k + 4$$

したがって　$(x,\ y) = (7k-1, -25k+4) \quad \cdots(*)$

$k = 0$ を $(*)$ に代入すると　$\mathbf{(-1,\ 4)}$

(2) $(*)$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2 &= (7k-1)^2 + (-25k+4)^2 = 674k^2 - 214k + 17 \\ &= 647\left(k-\frac{107}{647}\right)^2 - \frac{107^2}{647} + 17\end{aligned}$$

したがって，m と k は次のように対応する．

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
k	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	$\cdots$

よって　$\mathbf{P_1(-1,\ 4),\ P_2(6, -21)}$

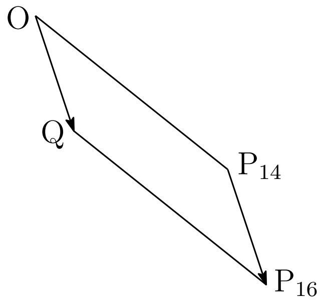
(3) $(*)$ および (2) の表から　$\mathrm{P}_{2k}(7k-1, -25k+4) \quad \cdots(**)$

また　$\mathrm{P}_{2k+1}(7(-k)-1,\ -25(-k)+4)$　すなわち　$\mathrm{P}_{2k+1}(-7k-1,\ 25k+4)$

$(**)$ より，$\mathrm{P}_{2k+2}(7k+6,\ -25k-21)$ であるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}} = (-14k,\ 50k),\quad \overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}} = (7, -25)}$$

(4) $(**)$ および (3) の結果に $k=7$ を代入すると



$$\mathrm{P}_{14}(48,-171),\quad \overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}=(7,-25)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}$ より　　$\mathrm{Q}(7,-25)$

直線 OQ の方程式は　　$25x+7y=0$

直線 $\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}$ の方程式は

$$25(x-48)+7(y+171)=0 \quad \text{すなわち} \quad 25x+7y=3$$

直線 OP_{14} の方程式は　　$171x+48y=0$

直線 QP_{16} の方程式は

$$171(x-7)+48(y+25)=0 \quad \text{すなわち} \quad 171x+48y=-3$$

したがって，四角形 $\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_14$ の周および内部を表す領域は

$$\begin{cases} 0 \leqq 25x+7y \leqq 3 \\ -3 \leqq 171x+48y \leqq 0 \end{cases}$$

この領域内の点 $(x,\ y)$ が格子点であるとき，$25x+7y$ および $171x+48y$ は整数であるから，整数 $i,\ j$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ -3 \leqq j \leqq 0)$ を用いて

$$\begin{cases} 25x+7y=i \\ 171x+48y=j \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad x=16i-\frac{7j}{3},\ y=-57i+\frac{25j}{3}$$

x，y は整数であるから，条件を満たす $(i,\ j)$ の組は

$$(i,\ j)=(0,\ 0),(1,\ 0),(2,\ 0),(3,\ 0),(0,-3),(1,-3),(2,-3),(3,-3),$$

よって，これに対応する格子点 $(x,\ y)$ は

$$\mathbf{(0,\ 0),\ (16,-57),\ (32,-114),\ (48,-171),}$$
$$\mathbf{(7,-25),\ (23,-82),\ (39,-139),(55,-196)}$$