

平成29年度 広島大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・医・歯・薬・教育(自然系・理数系)・
総合学科(理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5

1 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \tan \frac{\pi}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + 1} + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。次の問いに答えよ。

- (1) $a_2 = \tan \frac{\pi}{6}$, $a_3 = \tan \frac{\pi}{12}$ であることを示せ。
- (2) 一般項 a_n の表す n の式を推定し、それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n$ を求めよ。

2 $a > 0$ とする。次の問いに答えよ。

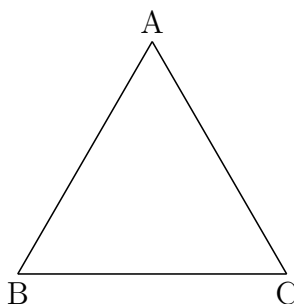
- (1) 関数 $f(t) = t^3 - 2at + 1$ の区間 $t \geq 0$ における最小値を、 a を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた最小値が0となるときの a の値を A とおく。 A^3 を求めよ。
- (3) 座標平面上の曲線 $y = x^4$ を C_1 , 点 $(0, a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする。 C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ。
- (4) 座標平面において、点 P が曲線 $y = x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0, a)$ の距離の最小値を考える。その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ。

- 3 表が出る確率が p , 裏が出る確率が $1 - p$ であるようなコインがある. ただし, $0 < p < 1$ である. このとき, 下図のような正三角形の 3 頂点 A, B, C を次の規則で移動する動点 R を考える.

コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し, 裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する.

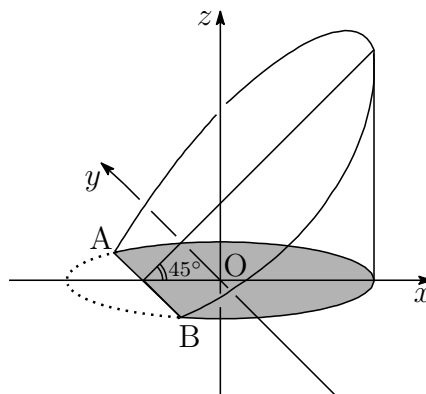
R は最初 A にあり, 全部で $(2N + 3)$ 回移動する. ここで, N は自然数である. 移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k ($k = 2, 3, \dots, 2N + 3$) とする. 次の問いに答えよ.

- (1) P_2, P_3 を求めよ.
- (2) P_{2m}, P_{2m+1} ($2 \leq m \leq N + 1$) を求めよ.
- (3) $p = \frac{1}{2}$ とする. 移動回数がちょうど $2N + 3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ.



- 4 座標空間内の平面 $H : z = 0$ とその上の曲線 $C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を考える. C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする. C 上の 2 点 $A\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $B\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ に対し, 線分 AB を含み平面 H と 45° の角をなす平面を T とする. ただし, 平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとす. 平面 H , 平面 T および曲面 K が囲む二つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 立体 V と平面 H の共通部分 (下図の灰色で示される部分) の面積を求めよ.
- (2) 立体 V を平面 $x = t$ ($-1 < t < 2$) で切ったとき, 断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ.
- (3) 立体 V の体積を求めよ.



- 5 x 座標, y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ. 格子点 $O(0, 0)$ および $A(50, 14)$ を考える. 次の問いに答えよ.
- (1) $\vec{OP} \cdot \vec{OA} = 6$ を満たす格子点 P を一つ求めよ.
 - (2) m を自然数とする. $\vec{OP} \cdot \vec{OA} = 6$ を満たす格子点 P のうち, 長さ OP が m 番目に小さい点を P_m とする. P_1 および P_2 を求めよ.
 - (3) P_m を (2) で定めた格子点とする. 自然数 k に対し, ベクトル $\vec{P_{2k}P_{2k+1}}$ および $\vec{P_{2k}P_{2k+2}}$ を成分表示せよ.
 - (4) P_m を (2) で定めた格子点とする. Q を $\vec{OQ} = \vec{P_{14}P_{16}}$ を満たす点とする. 四角形 $OQP_{16}P_{14}$ の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ.

解答例

1 (1) $a_n = \tan \theta_n \left(-\frac{\pi}{2} < \theta_n < \frac{\pi}{2} \right) \cdots (*)$ とおくと

$$a_1 = \tan \frac{\pi}{3} \text{ より } \theta_1 = \frac{\pi}{3} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + 1} + 1} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta_{n+1} &= \frac{\tan \theta_n}{\sqrt{\tan^2 \theta_n + 1} + 1} = \frac{\sin \theta_n}{1 + \cos \theta_n} \\ &= \frac{2 \sin \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_n}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta_n}{2}} = \frac{\sin \frac{\theta_n}{2}}{\cos \frac{\theta_n}{2}} = \tan \frac{\theta_n}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2} \quad \cdots \textcircled{2} \quad \text{すなわち } \theta_n = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} \quad \cdots (**)$$

$$\text{したがって } a_n = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} \text{ よって } a_2 = \tan \frac{\pi}{6}, \quad a_3 = \tan \frac{\pi}{12}$$

(2) (*) を用いて, a_n は (**) であると推定する.

[1] $n = 1$ のとき, ① より, (**) は成立する.

[2] $n = k$ のとき, (**) が成立する,

$$\text{すなわち, } \theta_k = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k-1}} \text{ と仮定すると, } \textcircled{2} \text{ より}$$

$$\theta_{k+1} = \frac{1}{2} \theta_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k-1}} = \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$$

したがって, $n = k + 1$ のときも (**) が成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について, (**) は成立する.

$$\text{よって } a_n = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

(3) (**) より, $2^n = \frac{2\pi}{3\theta_n}$ であるから $2^n a_n = \frac{2\pi}{3\theta_n} \tan \theta_n = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\tan \theta_n}{\theta_n}$

$n \rightarrow \infty$ のとき, $\theta_n \rightarrow +0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = \lim_{\theta_n \rightarrow +0} \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\tan \theta_n}{\theta_n} = \frac{2\pi}{3}$$



2 (1) $f(t) = t^3 - 2at + 1$ ($a > 0$) より

$$f'(t) = 3t^2 - 2a = 3 \left(t + \sqrt{\frac{2a}{3}} \right) \left(t - \sqrt{\frac{2a}{3}} \right)$$

$t \geq 0$ における $f(t)$ 増減表は

t	0	...	$\sqrt{\frac{2a}{3}}$...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	1	\searrow	極小	\nearrow

よって、最小値は $f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right) = \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{2a}{3}} - 2a\sqrt{\frac{2a}{3}} + 1 = -\frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2a}{3}} + 1$

(2) $a = A$ のとき、最小値が 0 であるから、(1) の結果より

$$-\frac{4A}{3}\sqrt{\frac{2A}{3}} + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{4A}{3}\sqrt{\frac{2A}{3}} = 1$$

両辺を平方すると $\frac{16A^2}{9} \cdot \frac{2A}{3} = 1$ よって $A^3 = \frac{27}{32}$

(3) $C_1: y = x^4$, $C_2: x^2 + (y - a)^2 = a^2$ から y を消去すると

$$x^2 + (x^4 - a)^2 = a^2 \quad \text{整理すると} \quad x^2(x^6 - 2ax^2 + 1) = 0 \quad \dots (*)$$

C_1 と C_2 の共有点の個数は、方程式 (*) の実数解の個数に等しい。

$t = x^2 \dots \textcircled{1}$ とおくと、上の方程式は $tf(t) = 0 \quad \dots (**)$

(1) の結果を利用すると、 $f(t) = 0$ ($t \geq 0$) の解の個数は、次のようになる。

$$f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right) > 0, \quad \text{すなわち, } 0 < a < \frac{3}{2\sqrt[3]{4}} \text{ のとき} \quad 0 \text{ 個}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right) = 0, \quad \text{すなわち, } a = \frac{3}{2\sqrt[3]{4}} \text{ のとき} \quad 1 \text{ 個}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right) < 0, \quad \text{すなわち, } \frac{3}{2\sqrt[3]{4}} < a \text{ のとき} \quad 2 \text{ 個}$$

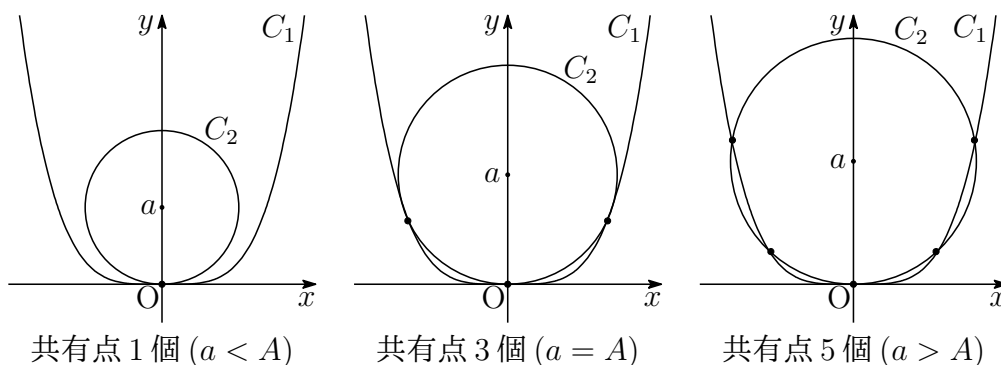
① より、これらの正の解 t に対し、(*) の解はそれぞれ $x = \pm\sqrt{t}$ である。

(*), (**) より $0 < a < \frac{3}{2\sqrt[3]{4}}$ のとき 1 個

$a = \frac{3}{2\sqrt[3]{4}}$ のとき 3 個

$\frac{3}{2\sqrt[3]{4}} < a$ のとき 5 個

補足 a の値による C_1 と C_2 の共有点は次のようになる.



(4) C_1 上の点 (x, x^4) と点 $(0, a)$ 間の距離を d とすると

$$d^2 = x^2 + (x^4 - a)^2 = x^8 - 2ax^4 + x^2 + a^2$$

d の最小値が a であるとき, $d^2 \geq a^2$ であるから

$$x^8 - 2ax^4 + x^2 + a^2 \geq a^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2(x^6 - 2ax^2 + 1) \geq 0$$

上式が常に成り立つとき, 任意の x に対して

$$x^6 - 2ax^2 + 1 \geq 0$$

が成立する a の範囲であるから, $t = x^2$ とおくと, $t \geq 0$ において, 常に

$$f(t) \geq 0$$

を満たす a の範囲である.

したがって, (1) の結果から $f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right) \geq 0$ を満たす a の範囲は ($a > 0$)

$$-\frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2a}{3}} + 1 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \leq \frac{3}{2\sqrt[3]{4}} \quad \text{よって} \quad 0 < a \leq \frac{3}{2\sqrt[3]{4}}$$



- 3 (1) P_2 は, $A \rightarrow B \rightarrow A$ または $A \rightarrow C \rightarrow A$ と移動する確率より

$$P_2 = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$

P_3 は, $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ または $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ と移動する確率より

$$P_3 = p^3 + (1-p)^3$$

- (2) 移動回数がちょうど $2m$ に達したとき, R が A に初めて戻る場合, 最初に $A \rightarrow B$ と移動し BC 間を $m-1$ 回往復して最後に $B \rightarrow A$ と移動するか, 最初に $A \rightarrow C$ と移動し CB 間を $m-1$ 回往復して最後に $C \rightarrow A$ と移動する確率であるから

$$\begin{aligned} P_{2m} &= p\{p(1-p)\}^{m-1}(1-p) + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}p \\ &= 2\{p(1-p)\}^m \end{aligned}$$

移動回数がちょうど $2m+1$ に達したとき, R が A に初めて戻る場合, 最初に $A \rightarrow B$ と移動し BC 間を $m-1$ 回往復して最後に $B \rightarrow C \rightarrow A$ と移動するか, 最初に $A \rightarrow C$ と移動し CB 間を $m-1$ 回往復して最後に $C \rightarrow B \rightarrow A$ と移動する確率であるから

$$\begin{aligned} P_{2m+1} &= p\{p(1-p)\}^{m-1}p^2 + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}(1-p)^2 \\ &= \{p^3 + (1-p)^3\}\{p(1-p)\}^{m-1} \end{aligned}$$

- (3) $p = \frac{1}{2}$ のとき $p(1-p) = \frac{1}{4}$, $p^3 + (1-p)^3 = \frac{1}{4}$

$$q = \frac{1}{4} \text{ とおくと, (2) の結果から } P_{2m} = 2q^m, \quad P_{2m+1} = q \cdot q^{m-1} = q^m$$

移動回数が $2k$ ($1 \leq k \leq N$) のとき R が A に初めて戻り, $2N+3$ 回目に R が A に 2 度目に戻る確率は

$$P_{2k}P_{2(N-k+1)+1} = 2q^k \cdot q^{N-k+1} = 2q^{N+1}$$

移動回数が $2k+1$ ($1 \leq k \leq N$) のとき R が A に初めて戻り, $2N+3$ 回目に R が A に 2 度目に戻る確率は

$$P_{2k+1}P_{2(N-k+1)} = q^k \cdot 2q^{N-k+1} = 2q^{N+1}$$

よって, 求める確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \{P_{2k}P_{2(N-k+1)+1} + P_{2k+1}P_{2(N-k+1)}\} &= \sum_{k=1}^N (2q^{N+1} + 2q^{N+1}) \\ &= \sum_{k=1}^N 4q^{N+1} = 4Nq^{N+1} = \frac{N}{4} \end{aligned}$$

■

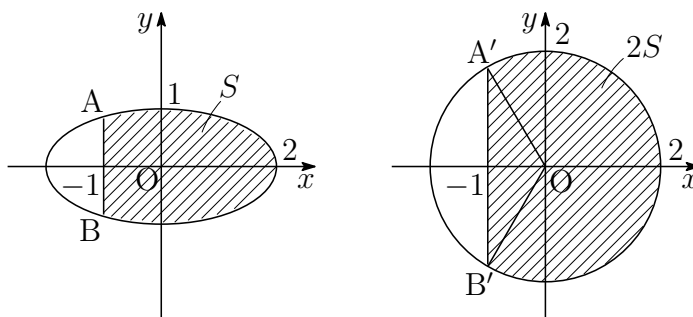
4 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ より, 求める面積を S とすると $S = 2 \int_{-1}^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$

$$x = 2 \cos \theta \text{ とおくと } \frac{dx}{d\theta} = -2 \sin \theta \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \rightarrow 2 \\ \theta & \frac{2\pi}{3} \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } S &= 2 \int_{\frac{2\pi}{3}}^0 \sqrt{1 - \cos^2 \theta} (-2 \sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} 4 \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (2 - 2 \cos 2\theta) d\theta \\ &= \left[2\theta - \sin 2\theta \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

別解 楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を x 軸を元に y 軸方向に 2 倍に拡大したものは, 中心が原点で半径 2 の円. このとき, 2 点 $A\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ が移動した点をそれぞれ $A'(-1, \sqrt{3})$, $B'(-1, -\sqrt{3})$ とおくと, $\angle A'OB = \frac{2\pi}{3}$

$$2S = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \sin \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3} + \frac{8\pi}{3} \quad \text{よって } S = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3}$$



(2) 平面 $x = t$ ($-1 < t < 2$) と楕円柱面 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ との交点の y 座標は

$$\frac{t^2}{4} + y^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = \pm \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}$$

平面 $x = t$ ($-1 < t < 2$) と平面 $T: z = x + 1$ との交点の z 座標は $z = t + 1$
 V を平面 $x = t$ ($-1 < t < 2$) で切った断面は, 底面 $2\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}$, 高さ $t + 1$ の長方形であるから

$$S(t) = 2(t + 1)\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}$$

(3) V の体積は, (2) の結果および (1) で求めた定積分に注意して

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 S(t) dt &= \int_{-1}^2 2t\sqrt{1-\frac{t^2}{4}} dt + 2 \int_{-1}^2 \sqrt{1-\frac{t^2}{4}} dt \\ &= \left[-\frac{8}{3} \left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^2 + S \\ &= \sqrt{3} + \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{4\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

5 (1) $O(0, 0)$, $A(50, 14)$ より, $P(x, y)$ とおくと, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 6$ より

$$50x + 14y = 6 \quad \text{ゆえに} \quad 25x + 7y = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

x, y は整数であるから, $25 \equiv 4 \pmod{7}$ より, $\textcircled{1}$ は

$$4x \equiv 3 \quad \text{ゆえに} \quad 8x \equiv 6 \quad \text{すなわち} \quad x \equiv -1 \pmod{7}$$

整数 k を用いて, $x = 7k - 1$ とおき, これを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$25(7k - 1) + 7y = 3 \quad \text{ゆえに} \quad y = -25k + 4$$

したがって $(x, y) = (7k - 1, -25k + 4) \quad \cdots (*)$

$k = 0$ を $(*)$ に代入すると $(-1, 4)$

(2) $(*)$ より $OP^2 = (7k - 1)^2 + (-25k + 4)^2 = 674k^2 - 214k + 17$

$$= 647 \left(k - \frac{107}{647} \right)^2 - \frac{107^2}{647} + 17$$

したがって, m と k は次のように対応する.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
k	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	...

よって $P_1(-1, 4), P_2(6, -21)$

(3) $(*)$ および (2) の表から $P_{2k}(7k - 1, -25k + 4) \quad \cdots (**)$

また $P_{2k+1}(7(-k) - 1, -25(-k) + 4)$ すなわち $P_{2k+1}(-7k - 1, 25k + 4)$

$(**)$ より, $P_{2k+2}(7k + 6, -25k - 21)$ であるから

$$\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}} = (-14k, 50k), \quad \overrightarrow{P_{2k}P_{2k+2}} = (7, -25)$$

(4) (**) および (3) の結果に $k = 7$ を代入すると

$$P_{14}(48, -171), \quad \overrightarrow{P_{14}P_{16}} = (7, -25)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{P_{14}P_{16}} \text{ より } Q(7, -25)$$

$$\text{直線 } OQ \text{ の方程式は } 25x + 7y = 0$$

直線 $P_{14}P_{16}$ の方程式は

$$25(x - 48) + 7(y + 171) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 25x + 7y = 3$$

$$\text{直線 } OP_{14} \text{ の方程式は } 171x + 48y = 0$$

直線 QP_{16} の方程式は

$$171(x - 7) + 48(y + 25) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 171x + 48y = -3$$

したがって、四角形 $OQP_{16}P_{14}$ の周および内部を表す領域は

$$\begin{cases} 0 \leq 25x + 7y \leq 3 \\ -3 \leq 171x + 48y \leq 0 \end{cases}$$

この領域内の点 (x, y) が格子点であるとき、 $25x + 7y$ および $171x + 48y$ は整数であるから、整数 i, j ($0 \leq i \leq 3, -3 \leq j \leq 0$) を用いて

$$\begin{cases} 25x + 7y = i \\ 171x + 48y = j \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad x = 16i - \frac{7j}{3}, \quad y = -57i + \frac{25j}{3}$$

x, y は整数であるから、条件を満たす (i, j) の組は

$$(i, j) = (0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, -3), (1, -3), (2, -3), (3, -3),$$

よって、これに対応する格子点 (x, y) は

$$(0, 0), (16, -57), (32, -114), (48, -171), \\ (7, -25), (23, -82), (39, -139), (55, -196)$$

