平成 28 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

1 座標空間に 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(s,\ s,\ s),\ \mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$$

がある．ただし，$s>0$ とする．t，u，v を実数とし，

$$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ のとき，t を s を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$ のとき，u，v を s を用いて表せ．

(3) (2) のとき，2 点 D，E を

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$$

となる点とする．四面体 OADE の体積が 2 であるとき，s の値を求めよ．

2 次の問いに答えよ．

(1) a を正の定数とする．関数 $f(x)=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた $f^{-1}(x)$ の導関数を求めよ．

(3) c を定数とする．x 軸，y 軸，直線 $x=c$ および曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 複素数平面上を，点Pが次のように移動する．

1. 時刻 0 では，P は原点にいる．時刻 1 まで，P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する．移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_1(z_1)$ とすると，$z_1 = 1$ である．
2. 時刻 1 に P は $\mathrm{Q}_1(z_1)$ において進行方向が $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 2 までその方向に速さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する．移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_2(z_2)$ とすると，$z_2 = \dfrac{3+i}{2}$ である．
3. 以下同様に，時刻 n に P は $\mathrm{Q}_n(z_n)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する．移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_{n+1}(z_{n+1})$ とする．ただし n は自然数である．

$\alpha = \dfrac{1+i}{2}$ として，次の問いに答えよ．

(1) z_3，z_4 を求めよ．

(2) z_n を α，n を用いて表せ．

(3) P が $\mathrm{Q}_1(z_1)$，$\mathrm{Q}_2(z_2)$，$\cdots$ と移動するとき，P はある点 $\mathrm{Q}(w)$ に限りなく近づく．w を求めよ．

(4) z_n の実部が (3) で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり，次の試行を行う．

1 枚の硬貨を投げ，表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く．ただし，点 $(3,\ 1)$ に到達したら Q は原点に戻る．

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $(x_4,\ y_4) = (0,\ 0)$ となる確率を求めよ．

(2) $(x_8,\ y_8) = (5,\ 3)$ となる確率を求めよ．

(3) $x_8 + y_8 \leqq 4$ となる確率を求めよ．

(4) $x_{4n} + y_{4n} \leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ．ここで k は n 以下の自然数とする．

5 数列

$$x_n = 2^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を考える．この数列は 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, $\cdots$ であるが，各項の下 1 桁をみると，1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, $\cdots$ となっており，2 から循環が始まり循環の周期は 4 である．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 2 桁は，あるところから循環する．循環が始まるところと，循環の周期を求めよ．ここで，1 桁の数に対しては 0 を補って下 2 桁とみなすことにする．たとえば，2 の下 2 桁は 02 とする．

(2) 4 の倍数で，25 で割って 1 余る 2 桁の自然数 A を求めよ．

(3) 8 の倍数で，125 で割って 1 余る 3 桁の自然数 B を求めよ．

(4) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 3 桁は，あるところから循環する．循環が始まるところと，循環の周期を求めよ．ここで，2^m を 125 で割って 1 余るような最小の自然数 m が 100 であることを用いてもよい．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) O(0, 0, 0), A(s, s, s), B(-1, 1, 1), C(0, 0, 1) より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= s(1,\ 1,\ 1),\\ \vec{d} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - t\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1,\ 1,\ 1) - t(s,\ s,\ s)\\ &= (-1-st,\ 1-st,\ 1-st)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{d}=0$ であるから $(s>0)$，

$$1(-1-st)+1(1-st)+1(1-st)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t=\frac{1}{3s}}$$

(2) (1) の結果から，$st=\dfrac{1}{3}$ より　$\vec{d}=\left(-1-\dfrac{1}{3},\ 1-\dfrac{1}{3},\ 1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}(-2,\ 1,\ 1)$

$$\begin{aligned}\vec{e} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} - u\overrightarrow{\mathrm{OA}} - v\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (0,\ 0,\ 1) - u(s,\ s,\ s) - v(-1,\ 1,\ 1)\\ &= (-us+v, -us-v,\ 1-us-v)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$, $\vec{d}\perp\vec{e}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{e}=0$, $\vec{d}\cdot\vec{e}=0$ であるから

$$\begin{aligned}1(-us+v)+1(-us-v)+1(1-us-v)&=0,\\ -2(-us+v)+1(-us-v)+1(1-us-v)&=0\end{aligned}$$

整理すると $\begin{cases}-3us-v+1=0\\ -4v+1=0\end{cases}$ 　よって　$\boldsymbol{u=\dfrac{1}{4s},\ v=\dfrac{1}{4}}$

(3) (2) の結果から，$su=v=\dfrac{1}{4}$ であるから

$$\vec{e}=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}, 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}(0, -1.\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

このとき，四面体 OADE の体積が 2 であるから，$\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}||\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=2$ より

$$\frac{1}{6}\cdot s\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{s=6}$$

解説

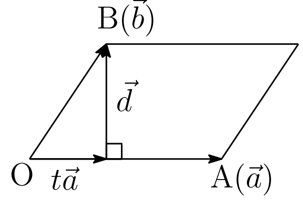
座標空間に 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3),\ \mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$$

があるとき，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．

$\vec{d}=\vec{b}-t\vec{a}$ が $\vec{a}\perp\vec{d}$ であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{d}=0$ より

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}-t\vec{a})=0 \quad ゆえに \quad t|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}$$



$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S^2&=(|\vec{a}||\vec{d}|)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}-t\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2(|\vec{b}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{a}|^2)\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-2t|\vec{a}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b})+(t|\vec{a}|^2)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ であるから

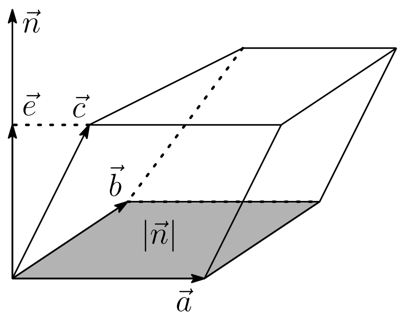
$$\begin{aligned}S^2&=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\end{aligned}$$

ここで，$\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$ とおくと

$$|\vec{n}|=S, \quad \vec{n}\cdot\vec{a}=0, \quad \vec{n}\cdot\vec{b}=0$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および $\vec{n}$ に平行なベクトル $\vec{e}$ を用いて

$$\vec{c}=\vec{e}+u\vec{a}+v\vec{b} \quad (u,\ v \text{ は定数})$$



とかける．このとき

$$\vec{n}\cdot\vec{e}=\vec{n}\cdot(\vec{c}-u\vec{a}-v\vec{b})=\vec{n}\cdot\vec{c}$$

$\vec{n}$ と $\vec{e}$ のなす角は 0° または 180° であるから　$|\vec{n}\cdot\vec{e}|=|\vec{n}||\vec{e}|$

この平行六面体の体積を V とすると，$V=|\vec{n}||\vec{e}|$ であるから

$$V=|\vec{n}\cdot\vec{e}|=|\vec{n}\cdot\vec{c}|=|(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3|$$

よって，四面体 OABC の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}S\cdot|\vec{e}|=\dfrac{1}{6}|\vec{n}||\vec{e}|=\dfrac{1}{6}V$ より

$$\frac{1}{6}|(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3|$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=f(x)$ とおくと，$y=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}\cdots$① より

$$e^{2x}-2ye^x+y^2=y^2+a \quad \text{ゆえに} \quad (e^x-y)^2=y^2+a$$

① より $\quad e^x-y=e^x-\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}=\dfrac{e^x+ae^{-x}}{2}>0 \qquad (a>0)$

したがって $\quad e^x-y=\sqrt{y^2+a}$ 　すなわち $\quad x=\log(y+\sqrt{y^2+a}\,)$

よって，求める逆関数は $\quad \boldsymbol{f^{-1}(x)=\log(x+\sqrt{x^2+a}\,)}$

(2) (1) の結果から $\quad \dfrac{d}{dx}f^{-1}(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}}$

別解 $y=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}$ より $\quad y'=\dfrac{e^x+ae^{-x}}{2}$

ここで，$e^x=y+\sqrt{y^2+a}$，$e^{-x}=\dfrac{-y+\sqrt{y^2+a}}{a}$ であるから

$$y'=\frac{y+\sqrt{y^2+a}+a\cdot\dfrac{-y+\sqrt{y^2+a}}{a}}{2}=\sqrt{y^2+a}$$

$y=f(x)$，$x=g(y)$ とおき，$g(y)=x$ を x について微分すると

$$g'(y)y'=1 \quad \text{ゆえに} \quad g'(y)=\frac{1}{y'}=\frac{1}{\sqrt{y^2+a}}$$

よって $\quad \dfrac{d}{dx}f^{-1}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

(3) (1),(2) の結果を用いると $\quad \{\log(x+\sqrt{x^2+c^2}\,)\}'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_0^c\frac{dx}{\sqrt{x^2+c^2}}=\Big[\ \log(x+\sqrt{x^2+c^2})\ \Big]_0^c\\&=\log(c+\sqrt{2}c)-\log c\\&=\boldsymbol{\log(1+\sqrt{2})}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $z_1=1$，$z_2-z_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\dfrac{1+i}{2}$,

$z_3-z_2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\cos\dfrac{2\pi}{4}+i\sin\dfrac{2\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot i=\dfrac{i}{2}$,

$z_4-z_3=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}=\dfrac{-1+i}{4}$

したがって　$z_3=z_1+(z_2-z_1)+(z_3-z_2)=1+\dfrac{1+i}{2}+\dfrac{i}{2}=\boldsymbol{\dfrac{3+2i}{2}}$,

$z_4=z_3+(z_4-z_3)=\dfrac{3+2i}{2}+\dfrac{-1+i}{4}=\boldsymbol{\dfrac{5+5i}{4}}$

(2) k を自然数とすると

$$\begin{aligned}z_{k+1}-z_k&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k\left(\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}\right)\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^k=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^k=\alpha^k\end{aligned}$$

よって　$z_n=z_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)=1+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k=\boldsymbol{\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}}$

(3) $|\alpha|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$

よって　$w=\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\frac{1+i}{2}}=\boldsymbol{1+i}$

(4) $\dfrac{1}{1-\alpha}=1+i=2\alpha$ であるから，(2) の結果より

$$\begin{aligned}z_n&=2\alpha(1-\alpha^n)=2\alpha-2\alpha^{n+1}\\&=1+i-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}\left(\cos\frac{n+1}{4}\pi+i\sin\frac{n+1}{4}\pi\right)\end{aligned}$$

したがって　$\mathrm{Re}(z_n)=1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\cos\dfrac{n+1}{4}\pi$

また，(3) の結果から　$\mathrm{Re}(w)=1$ であるから

$$\mathrm{Re}(z_n)-\mathrm{Re}(w)=-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\cos\frac{n+1}{4}\pi>0$$

$\dfrac{\pi}{2}+2j\pi<\dfrac{n+1}{4}\pi<\dfrac{3}{2}\pi+2j\pi$ (j は整数) であるから　$8j+1<n<8j+5$

よって　$\boldsymbol{n=8j+2,\ 8j+3,\ 8j+4}$ **(j は負でない整数)**

4 (1) $(x_4,\ y_4) = (0,\ 0)$ となるのは，硬貨を 4 回投げて，表が 3 回，裏が 1 回出る確率であるから

$$ {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{1}{4}} $$

(2) $(x_8,\ y_8) = (5,\ 3)$ となるのは，点 $(3, 1)$ を通らずに，点 $(5,\ 3)$ に到達する確率であるから，(1) の結果を利用して

$$ {}_8\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{2}\right)^8 - \frac{1}{4} \times {}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{7}{32} - \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \boldsymbol{\frac{1}{8}} $$

(3) $x_8 + y_8 \leqq 4$ となるのは，4 回目に点 $(3,\ 1)$ に到達することである．したがって，(1) の結果から，求める確率は

$$ \boldsymbol{\frac{1}{4}} $$

(4) $x_{4n} + y_{4n} \leqq 4k$ となるのは，4 回目，8 回目，$\cdots$，$4(n-k)$ 回目に点 $(3,\ 1)$ に到達する，すなわち，ちょうど $n-k$ 回原点に戻る．よって，(1) の結果から，求める確率は

$$ \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} = \boldsymbol{\frac{1}{4^{n-k}}} $$

5 (1) $x_n = 2^n$ の下 2 桁は，次のようになる．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_n	02	04	08	16	32	64	28	56	12	24	48

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
x_n	96	92	84	68	36	72	44	88	76	52	04

よって，**04** から循環が始まり循環の周期は **20** である．

(2) 25 で割って 1 余る 2 桁の数は　26, 51, 76

A は 4 の倍数であるから　　$\boldsymbol{A = 76}$

別解 $4x \equiv 1 \pmod{25}$ を満たす整数 x は

$$ 24x \equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad -x \equiv 6 \quad \text{すなわち} \quad x \equiv -6 \pmod{25} $$

$x = 25k - 6$ であるから (k は整数)　$4x = 100k - 24$

A は 2 桁の自然数であるから，$k = 1$ を代入して　$\boldsymbol{A = 76}$

(3) 125 で割って 1 余る 3 桁の自然数は

$$126,\ 251,\ 376,\ 501,\ 626,\ 751,\ 876$$

B は 8 の倍数であるから　　$\boldsymbol{B = 376}$

別解 $8y \equiv 1 \pmod{125}$ を満たす整数 y は

$$120y \equiv 15 \quad ゆえに \quad -5y \equiv 15 \pmod{125}$$

$24y \equiv 3,\quad -25y \equiv 75 \pmod{125}$ であるから

$$24y - 25y \equiv 3 + 75 \quad ゆえに \quad y \equiv -78 \pmod{125}$$

$y = 125j - 78$ であるから (j は整数)　$8y = 1000j - 624$

B は 3 桁の自然数であるから，$j = 1$ を代入して　$\boldsymbol{B = 376}$

(4) 循環の周期を e とすると (e は自然数)，整数 m に対して

$$2^{m+e} - 2^m = 1000M\ (M \text{ は整数}) \quad ゆえに \quad 2^{m-3}(2^e - 1) = 125M$$

2^{m-3} は整数であるから，これを満たす最小の m は　3

したがって，循環の始まりは　2^3　すなわち　**008**

$2^e - 1$ は 125 で割り切れるから　　$2^e \equiv 1 \pmod{125}$

これを満たす最小の自然数 e は 100 であるから，求める周期は　**100**

解説

1からnまでの自然数のうちで，nと互いに素であるものの個数を表す関数$\varphi(n)$を，オイラーのトーシェント関数 (Euler's totient function) またはφ関数 (phi function) といい，以下の定理が成り立つ．

定理 1

p_1，$p_2, \cdots, p_l$を素数，k_1，$k_2, \cdots, k_l$を自然数とすると

$$n = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_l}^{k_l}$$

について，次式が成り立つ．

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_l}\right)$$

フェルマー・オイラーの定理 (Fermat-Euler Theorem)

自然数nと互いに素である自然数aについて，次式が成り立つ．

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

証明 http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (p6を参照)．

定理 2

自然数nと互いに素である自然数aについて

$$a^e \equiv 1 \pmod{n}$$

を満たす最小の自然数e(位数) は，$\varphi(n)$の約数である．

証明 $\varphi(n)$がeで割り切れないと仮定し，$\varphi(n)$をeで割った商をq，余りをrとすると

$$\varphi(n) = eq + r \quad (0 < r < e)$$

したがって $$a^{\varphi(n)} = a^{eq+r} = (a^e)^q a^r$$

$a^{\varphi(n)} \equiv 1$，$a^e \equiv 1 \pmod{n}$であるから

$$a^r \equiv 1 \qquad \pmod{n}$$

これは，eが位数であることに反する． 証終

別解 (1)

循環の周期を e とすると (e は自然数)，整数 n に対して

$$2^{n+e} - 2^n = 100N \ (N \text{ は整数}) \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n-2}(2^e - 1) = 25N$$

2^{n-2} は整数であるから，これを満たす最小の n は　2
したがって，循環の始まりは　2^2　すなわち　**04**
$2^e - 1$ は 25 で割り切れるから　　$2^e \equiv 1 \pmod{25}$　$\cdots$①
$25 = 5^2$ より，$\varphi(25) = 25\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = 20$ であるから，フェルマー・オイラーの定理により

$$2^{20} \equiv 1 \pmod{25}$$

① を満たす最小の自然数 e(位数) は，20 の約数であるから，法 25 について

$$2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^4 \equiv 16, \quad 2^5 \equiv 7, \quad 2^{10} \equiv 7^2 \equiv -1$$

よって，求める周期 (位数) は　　**20**

別解 (4)

循環の周期を e とすると (e は自然数)，整数 m に対して

$$2^{m+e} - 2^m = 1000M \ (M \text{ は整数}) \quad \text{ゆえに} \quad 2^{m-3}(2^e - 1) = 125M$$

2^{m-3} は整数であるから，これを満たす最小の m は　3
したがって，循環の始まりは　2^3　すなわち　**008**
$2^e - 1$ は 125 で割り切れるから　　$2^e \equiv 1 \pmod{125}$　$\cdots$②
$125 = 5^3$ より，$\varphi(125) = 125\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = 100$ であるから，フェルマー・オイラーの定理により

$$2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$$

② を満たす最小の自然数 e(位数) は，100 の約数であるから，法 125 について

$$\begin{aligned}
&2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^4 \equiv 16, \quad 2^5 \equiv 32, \\
&2^{10} \equiv 32^2 \equiv 1024 \equiv 24, \quad 2^{20} \equiv 24^2 \equiv 576 \equiv -24, \\
&2^{25} \equiv -24 \cdot 32 \equiv -768 \equiv -43, \quad 2^{50} \equiv (-43)^2 \equiv 1849 \equiv -1
\end{aligned}$$

よって，求める周期 (位数) は　　**100**