

平成27年度 広島大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
 理・工・医・歯・薬・教育(自然系・理数系)・
 総合学科(理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5

1 座標平面上の点 $P(1, 1)$ を中心とし、原点 O を通る円を C_1 とする。 k を正の定数として、曲線 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) を C_2 とする。 C_1 と C_2 は2点で交わり、その交点を Q, R とするとき、直線 PQ は x 軸に平行であるとする。点 Q の x 座標を q とし、点 R の x 座標を r とする。次の問いに答えよ。

- (1) k, q, r の値を求めよ。
- (2) 曲線 C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S を求めよ。
- (3) $x = 1 + \sqrt{2} \sin \theta$ とおくことにより、定積分 $\int_r^q \sqrt{2 - (x - 1)^2} dx$ の値を求めよ。
- (4) 円 C_1 の原点 O を含まない弧 QR と曲線 C_2 で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

2 座標平面上の放物線

$$C_n : y = x^2 - p_n x + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える。ただし、 p_n, q_n は

$$p_1^2 - 4q_1 = 4, \quad p_n^2 - 4q_n > 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

を満たす実数とする。 C_n と x 軸との二つの交点を結ぶ線分の長さを l_n とする。また、 C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} \right)^3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) C_n の頂点の y 座標を l_n を用いて表せ。
- (2) 数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $p_n = n\sqrt{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(-\frac{2q_n}{n^2} \right)$ を求めよ。ただし、 $\log x$ は x の自然対数である。

3 座標空間内に5点

$$O(0, 0, 0), A\left(0, 0, \frac{3}{4}\right), B\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), C(s, t, 0), D(0, u, 0)$$

がある。ただし、 s, t, u は実数で、 $s > 0, t > 0, s + t = 1$ を満たすとする。3点 A, B, C の定める平面が y 軸と点 D で交わっているとき、次の問いに答えよ。

- (1) 直線 AB と x 軸との交点の x 座標を求めよ。
- (2) u を t を用いて表せ。また、 $0 < u < 1$ であることを示せ。
- (3) 点 $(0, 1, 0)$ を E とする。点 D が線分 OE を $12:1$ に内分するとき、 t の値を求めよ。

4 a, b, p は $a > 0, b > 0, p < 0$ を満たす実数とする。座標平面上の2曲線

$$C_1: y = e^x, \quad C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を考える。ただし、 e は自然対数の底である。 C_1 と C_2 が点 (p, e^p) を共有し、その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき、次の問いに答えよ。

- (1) p を a を用いて表せ。
- (2) $\lim_{a \rightarrow \infty} (p + a)$ を求めよ。
- (3) $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{b^2 e^{2a}}{a}$ を求めよ。

5 m, n を自然数とする。次の問いに答えよ。

- (1) $m \geq 2, n \geq 2$ とする。異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び、1列に並べる。このとき、ちょうど2種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。
- (2) $n \geq 3$ とする。3種類の文字 a, b, c から重複を許して n 個を選び、1列に並べる。このとき a, b, c すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。
- (3) $n \geq 3$ とする。 n 人を最大3組までグループ分けする。このときできたグループ数が2である確率 p_n を求めよ。ただし、どのグループ分けも同様に確からしいとする。

たとえば、 $n = 3$ のとき、A, B, C の3人のグループ分けする方法は

$$\{(A, B, C)\}, \{(A, B), (C)\}, \{(A, C), (B)\}, \\ \{(B, C), (A)\}, \{(A), (B), (C)\}$$

の5通りであるので、 $p_3 = \frac{3}{5}$ である。

- (4) (3) の確率 p_n が $\frac{1}{3}$ 以下となるような n の範囲を求めよ。

解答例

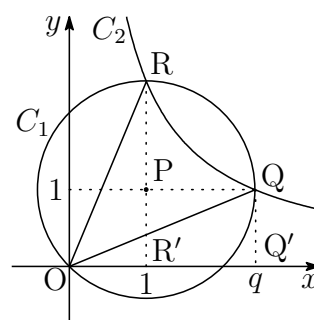
- 1 (1) $OP = \sqrt{2}$ より, C_1 は中心 $(1, 1)$, 半径 $\sqrt{2}$ の円.
 $k > 0$ より, C_1 と C_2 の交点 Q, R は第 1 象限あるから, $PQ = \sqrt{2}$ より

$$q - 1 = \sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad q = 1 + \sqrt{2}$$

C_1, C_2 は直線 $y = x$ に関して対称であるから,
 R は直線 $y = x$ に関して $Q(1 + \sqrt{2}, 1)$ と対称.

したがって $R(1, 1 + \sqrt{2})$ よって $r = 1$

R は $C_2: y = \frac{k}{x}$ 上の点であるから $1 + \sqrt{2} = \frac{k}{1}$ よって $k = 1 + \sqrt{2}$



- (2) $R'(1, 0), Q'(1 + \sqrt{2}, 0)$ とおく. 求める面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \triangle ORR' + \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1+\sqrt{2}}{x} dx - \triangle OQQ' \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) \left[\log x \right]_1^{1+\sqrt{2}} - \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2}) \cdot 1 \\ &= (1 + \sqrt{2}) \log(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

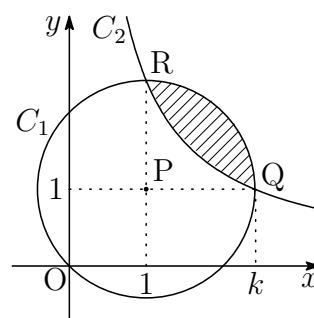
- (3) $x = 1 + \sqrt{2} \sin \theta$ より $\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{2} \cos \theta$
- | | |
|----------|-------------------------------|
| x | $1 \rightarrow 1 + \sqrt{2}$ |
| θ | $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ |

したがって, 求める定積分は

$$\begin{aligned} \int_1^{1+\sqrt{2}} \sqrt{2 - (x-1)^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \cos \theta \cdot \sqrt{2} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(4) $f(x) = \sqrt{2 - (x-1)^2}$ とおくと, $q = k$ により

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_1^k \{f(x) + 1\}^2 dx - \int_1^k \left(\frac{k}{x}\right)^2 dx \\ &= \int_1^k (\{f(x)\}^2 + 1) dx + 2 \int_1^k f(x) dx \\ &\quad - \int_1^k \frac{k^2}{x^2} dx \quad \cdots (*) \end{aligned}$$



このとき, (3) の結果を利用して

$$\begin{aligned} \int_1^k (\{f(x)\}^2 + 1) dx &= \int_1^k \{3 - (x-1)^2\} dx \\ &= \left[3x - \frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_1^k \\ &= 3(k-1) - \frac{1}{3}(k-1)^3 \\ &= 3\sqrt{2} - \frac{1}{3}(\sqrt{2})^3 = \frac{7\sqrt{2}}{3}, \end{aligned}$$

$$2 \int_1^k f(x) dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi,$$

$$\int_1^k \frac{k^2}{x^2} dx = \left[-\frac{k^2}{x} \right]_1^k = k(k-1) = 2 + \sqrt{2}$$

これらを (*) に代入して, 整理すると

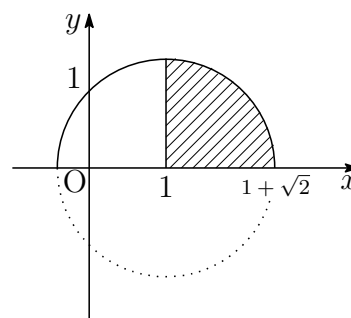
$$\frac{V}{\pi} = \pi + \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2 \quad \text{よって} \quad V = \pi \left(\pi + \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2 \right)$$

別解 (3) $y = \sqrt{2 - (x - 1)^2}$ とおくと

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2$$

したがって、求める定積分の値は、右の図の斜線部分の面積であるから

$$S = \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2}$$



補足 上の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積は

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi (\sqrt{2})^3 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \pi$$

図の斜線部分は、 $x \geq 0$, $y \geq 0$ にあるから、上の図形の重心の y 座標 h は、パップス・ギュルダンの定理 ($V = 2\pi hS$) により¹

$$h = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}}{2\pi \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$$

図形の対称性により、重心の x 座標 d は

$$d = 1 + h = 1 + \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$$

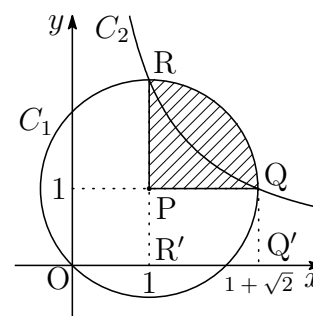
したがって、斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積 V_0 は

$$V_0 = 2\pi dS = 2\pi \left(1 + \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\right) \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \left(\pi + \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積も V_0 に等しい。

また、長方形 $PQQ'R'$ を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体は、半径 1、高さ $\sqrt{2}$ の円柱であるから、 $f(x) = \sqrt{2 - (x - 1)^2}$ について、次が成り立つ。

$$\pi \int_1^{1+\sqrt{2}} \{f(x) + 1\}^2 dx = V_0 + \sqrt{2}\pi$$



パップス・ギュルダンの定理は、高校数学の範囲外である。入試では使用できないが、便利な検算法である。 ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

- 2 (1) 2次方程式 $x^2 - p_n x + q_n = 0$ の解は

$$x = \frac{p_n \pm \sqrt{p_n^2 - 4q_n}}{2}$$

これが放物線 $y = x^2 - p_n x + q_n$ と x 軸との共有点の x 座標であるから、これらの差をとることにより

$$\ell_n = \sqrt{p_n^2 - 4q_n} \quad \dots (*)$$

$y = x^2 - p_n x + q_n$ を変形すると

$$y = \left(x - \frac{p_n}{2}\right)^2 - \frac{p_n^2 - 4q_n}{4}$$

よって、頂点の y 座標は $-\frac{p_n^2 - 4q_n}{4} = -\frac{\ell_n^2}{4}$

$$(2) S_n = \frac{1}{6}\ell_n^3 \text{ であるから } \frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n}\right)^3$$

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3 \text{ より } \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{(n+2)\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}}$$

$$\text{したがって } \frac{\ell_{n+1}}{(n+2)\sqrt{n+1}} = \frac{\ell_n}{(n+1)\sqrt{n}}$$

$$\text{ゆえに } \frac{\ell_n}{(n+1)\sqrt{n}} = \frac{\ell_1}{2} = \frac{\sqrt{p_1^2 - 4q_1}}{2} = 1 \text{ よって } \ell_n = (n+1)\sqrt{n}$$

$$(3) (*) \text{ を平方すると } \ell_n^2 = p_n^2 - 4q_n$$

これに $p_n = n\sqrt{n}$ および (2) の結果を代入すると

$$(n+1)^2 n = n^3 - 4q_n \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{2q_n}{n^2} = 1 + \frac{1}{2n}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(-\frac{2q_n}{n^2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



- 4 (1) 点 (p, e^p) は C_2 上の点であるから

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{e^{2p}}{b^2} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

C_2 上の点 (p, e^p) における接線の方程式は

$$\frac{px}{a^2} + \frac{e^p y}{b^2} = 1$$

すなわち
$$y = -\frac{b^2 p}{a^2 e^p} x + \frac{b^2}{e^p}$$

$y = e^x$ を微分すると $y' = e^x$

この直線の傾きが C_1 上の点 (p, e^p) における接線の傾きに等しいから

$$-\frac{b^2 p}{a^2 e^p} = e^p \quad \text{ゆえに} \quad \frac{e^{2p}}{b^2} = -\frac{p}{a^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

②を①に代入すると

$$\frac{p^2}{a^2} - \frac{p}{a^2} = 1 \quad \text{整理すると} \quad p^2 - p - a^2 = 0$$

$p < 0$ に注意してこれを解くと
$$p = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a^2}}{2}$$

- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} p + a &= \frac{1 - \sqrt{1 + 4a^2}}{2} + a = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 + 4a^2} - 2a}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2} + 2a} \right) \end{aligned}$$

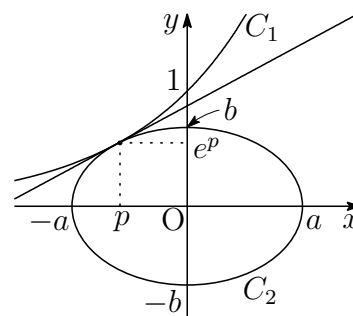
よって
$$\lim_{a \rightarrow \infty} (p + a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2} + 2a} \right) = \frac{1}{2}$$

- (3) ②より, $b^2 = -\frac{a^2 e^{2p}}{p}$ であるから

$$\frac{b^2 e^{2a}}{a} = -\frac{a^2 e^{2p}}{p} \cdot \frac{e^{2a}}{a} = -\frac{a e^{2p+2a}}{p} = \frac{a}{a - (p + a)} e^{2(p+a)}$$

したがって, (2) の結果を利用して

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{b^2 e^{2a}}{a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{a - (p + a)} e^{2(p+a)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{a}(p + a)} e^{2(p+a)} = e$$



- 5 (1) m 種類の文字から 2 種類の文字を選らぶ場合の総数は

$${}_m C_2 = \frac{m(m-1)}{2} \quad (\text{通り})$$

特定の 2 種類の文字列, 例えば, a, b を 1 列に並べる場合の総数は 2^n 通りある. この中で a だけが 1 列に並ぶ場合が 1 通りと, b だけが 1 列に並ぶ場合が 1 通りある. したがって, 両方の文字が並ぶ場合の総数は

$$2^n - 2 \quad (\text{通り}) \quad \dots \textcircled{1}$$

よって, 求める場合の数は

$$\frac{m(m-1)}{2} \times (2^n - 2) = m(m-1)(2^{n-1} - 1) \quad (\text{通り})$$

- (2) 重複を許して, a, b, c の 3 種類の文字を 1 列に並べる場合の総数は 3^n 通りある. この内, 1 種類の文字だけからなるものが 3 通りあり, 2 種類の文字からなる場合の数は, (1) の結果に $m = 3$ を代入して $6(2^{n-1} - 1)$ 通りある. したがって, a, b, c すべての文字を含む文字列の総数は

$$3^n - 3 - 6(2^{n-1} - 1) = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \quad (\text{通り})$$

- (3) (i) n 人を 1 グループとする場合の総数は 1 通り
(ii) n 人を a, b の 2 グループに分ける場合の総数は, ① の結果から

$$2^n - 2 \quad (\text{通り})$$

このとき, a, b のグループの区別をなくすと

$$\frac{2^n - 2}{2!} = 2^{n-1} - 1 \quad (\text{通り})$$

- (iii) n 人を a, b, c の 3 グループに分ける場合の総数は, (2) の結果から

$$3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \quad (\text{通り})$$

このとき, a, b, c のグループの区別をなくすと

$$\frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{3!} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}$$

- (i)~(iii) から, 求める確率 p_n は

$$p_n = \frac{2^{n-1} - 1}{1 + (2^{n-1} - 1) + \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}} = \frac{2^n - 2}{3^{n-1} + 1}$$

(4) $p_n \leq \frac{1}{3}$ のとき ($n \geq 3$), (3) の結果から

$$\frac{2^n - 2}{3^{n-1} + 1} \leq \frac{1}{3} \quad \text{整理すると} \quad 3^{n-1} - 3 \cdot 2^n + 7 \geq 0 \quad \cdots (*)$$

$$f(n) = 3^{n-1} - 3 \cdot 2^n + 7 \text{ とおくと}$$

$$f(3) = 3^2 - 3 \cdot 2^3 + 7 = -8$$

$$f(4) = 3^3 - 3 \cdot 2^4 + 7 = -14$$

$$f(5) = 3^4 - 3 \cdot 2^5 + 7 = -8$$

$$f(6) = 3^5 - 3 \cdot 2^6 + 7 = 58$$

ここで

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= (3^n - 3 \cdot 2^{n+1} + 7) - (3^{n-1} - 3 \cdot 2^n + 7) \\ &= 2 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^n = 2^n \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 3 \right\} \end{aligned}$$

したがって $f(3) > f(4) < f(5) < f(6) < \cdots$

よって, (*) を満たす n の範囲は $n \geq 6$

解説

異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び, 1 列に並べるとき, k 種類の文字を含む文字列の総数を ${}_n Q_k$ とすると ($1 \leq k \leq m$), 次が成立する.

$${}_n Q_1 = 1$$

$${}_n Q_2 = 2^n - {}_2 C_1 \cdot {}_n Q_1$$

$${}_n Q_3 = 3^n - {}_3 C_1 \cdot {}_n Q_1 - {}_3 C_2 \cdot {}_n Q_2$$

$${}_n Q_4 = 4^n - {}_4 C_1 \cdot {}_n Q_1 - {}_4 C_2 \cdot {}_n Q_2 - {}_4 C_3 \cdot {}_n Q_3$$

$${}_n Q_5 = 5^n - {}_5 C_1 \cdot {}_n Q_1 - {}_5 C_2 \cdot {}_n Q_2 - {}_5 C_3 \cdot {}_n Q_3 - {}_5 C_4 \cdot {}_n Q_4$$

⋮

$${}_n Q_k = k^n - \sum_{j=1}^{k-1} {}_k C_j \cdot {}_n Q_j$$

${}_n Q_1 = 1$ より, ${}_n Q_2 = 2^n - 2$ となり, これらを用いて (本題 (2) の計算)

$${}_n Q_3 = 3^n - {}_3 C_1 \cdot 1 - {}_3 C_2 \cdot (2^n - 2) = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$$

例 1 n 個並べたときに丁度 3 種類の文字がそろそろ確率を $P_3(n)$ とすると

$$P_3(n) = \frac{3 \times {}_{n-1}Q_2}{3^n} = \frac{3(2^{n-1} - 2)}{3^n} = \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}}$$

また、文字が 3 種類そろそろまで並べる文字数の期待値を E_3 とすると

$$\begin{aligned} E_3 &= \sum_{n=3}^{\infty} nP_3(n) = \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} - 1 - 2 \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} - 1 \right\} = \frac{11}{2} \quad (\text{個}) \end{aligned}$$

補足 $|x| < 1$ のとき、 $1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ を微分すると

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - 1$$

この計算は、次の公式² を利用すると簡単に求めることができる。

Coupon collector's problem

m 種類の文字すべてがそろそろまで並べる文字数の期待値 E_m は

$$E_m = m \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$$

実際 $E_3 = 3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{2}$

例 2 サイコロを投げて、すべての目がそろそろまで投げる回数の期待値 (期待回数) は

$$E_6 = 6 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) = \frac{147}{10}$$

■

²http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2012.pdf (p.12 に証明)