平成 27 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

1 座標平面上の点 P(1, 1) を中心とし，原点 O を通る円を C_1 とする．k を正の定数として，曲線 $y = \dfrac{k}{x}$ $(x > 0)$ を C_2 とする．C_1 と C_2 は 2 点で交わるとし，その交点を Q，R とするとき，直線 PQ は x 軸に平行であるとする．点 Q の x 座標を q とし，点 R の x 座標を r とする．次の問いに答えよ．

(1) k，q，r の値を求めよ．

(2) 曲線 C_2 と線分 OQ，OR で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(3) $x = 1 + \sqrt{2}\sin\theta$ とおくことにより，定積分 $\displaystyle\int_r^q \sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ の値を求めよ．

(4) 円 C_1 の原点 O を含まない弧 QR と曲線 C_2 で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

2 座標平面上の放物線

$$C_n : y = x^2 - p_n x + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を考える．ただし，p_n，q_n は

$${p_1}^2 - 4q_1 = 4, \quad {p_n}^2 - 4q_n > 0 \quad (n = 2, 3, 4 \cdots)$$

を満たす実数とする．C_n と x 軸との二つの交点を結ぶ線分の長さを ℓ_n とする．また，C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) C_n の頂点の y 座標を ℓ_n を用いて表せ．

(2) 数列 $\{\ell_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $p_n = n\sqrt{n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right)$ を求めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標空間内に 5 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right),\ \mathrm{C}(s,\ t,\ 0),\ \mathrm{D}(0,\ u,\ 0)$$

がある．ただし，s，t，u は実数で，$s > 0$，$t > 0$，$s + t = 1$ を満たすとする．3 点 A，B，C の定める平面が y 軸と点 D で交わっているとき，次の問いに答えよ．

(1) 直線 AB と x 軸との交点の x 座標を求めよ．

(2) u を t を用いて表せ．また，$0 < u < 1$ であることを示せ．

(3) 点 $(0,\ 1,\ 0)$ を E とする．点 D が線分 OE を 12 : 1 に内分するとき，t の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ a，b，p は $a > 0$，$b > 0$，$p < 0$ を満たす実数とする．座標平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = e^x, \quad C_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を考える．ただし，e は自然対数の底である．C_1 と C_2 が点 $(p,\ e^p)$ を共有し，その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき，次の問いに答えよ．

(1) p を a を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p + a)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ m，n を自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) $m \geqq 2$，$n \geqq 2$ とする．異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる．このとき，ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ．

(2) $n \geqq 3$ とする．3 種類の文字 a，b，c から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる．このとき a，b，c すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ．

(3) $n \geqq 3$ とする．n 人を最大 3 組までグループ分けする．このときできたグループ数が 2 である確率 p_n を求めよ．ただし，どのグループ分けも同様に確からしいとする．
たとえば，$n = 3$ のとき，A，B，C の 3 人のグループ分けする方法は

$$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})\},\ \{(\mathrm{A},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\},\ \{(\mathrm{A},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{B})\},$$
$$\{(\mathrm{B},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{A})\},\ \{(\mathrm{A}),\ (\mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$$

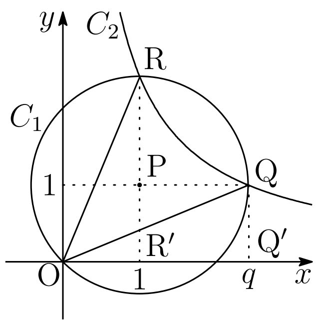
の 5 通りであるので，$p_3 = \dfrac{3}{5}$ である．

(4) (3) の確率 p_n が $\dfrac{1}{3}$ 以下となるような n の範囲を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\mathrm{OP}=\sqrt{2}$ より，C_1 は中心 $(1,\ 1)$，半径 $\sqrt{2}$ の円．
$k>0$ より，C_1 と C_2 の交点 Q，R は第 1 象限あるから，$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}$ より

$$q-1=\sqrt{2}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{q=1+\sqrt{2}}$$



C_1，C_2 は直線 $y=x$ に関して対称であるから，
R は直線 $y=x$ に関して $\mathrm{Q}(1+\sqrt{2},\ 1)$ と対称．

したがって　$\mathrm{R}(1,\ 1+\sqrt{2})$　よって　$\boldsymbol{r=1}$

R は $C_2 : y=\dfrac{k}{x}$ 上の点であるから　$1+\sqrt{2}=\dfrac{k}{1}$　よって　$\boldsymbol{k=1+\sqrt{2}}$

(2) $\mathrm{R}'(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}'(1+\sqrt{2},\ 0)$ とおく．求める面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \triangle\mathrm{ORR}'+\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1+\sqrt{2}}{x}\,dx-\triangle\mathrm{OQQ}' \\ &= \frac{1}{2}\cdot1\cdot(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})\Big[\ \log x\ \Big]_1^{1+\sqrt{2}}-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\cdot1 \\ &= \boldsymbol{(1+\sqrt{2})\log(1+\sqrt{2})} \end{aligned}$$

(3) $x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ より　$\dfrac{dx}{d\theta}=\sqrt{2}\cos\theta$

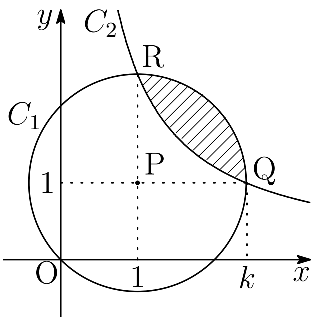
x	$1\longrightarrow 1+\sqrt{2}$
θ	$0\longrightarrow\ \frac{\pi}{2}$

したがって，求める定積分は

$$\begin{aligned} \int_1^{1+\sqrt{2}}\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\,d\theta \\ &= \Big[\ \theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

(4) $f(x)=\sqrt{2-(x-1)^2}$ とおくと，$q=k$ により

$$\frac{V}{\pi}=\int_1^k \{f(x)+1\}^2\,dx-\int_1^k\left(\frac{k}{x}\right)^2 dx$$
$$=\int_1^k \left(\{f(x)\}^2+1\right)dx+2\int_1^k f(x)\,dx$$
$$-\int_1^k \frac{k^2}{x^2}\,dx \quad \cdots(*)$$



このとき，(3) の結果を利用して

$$\begin{aligned}\int_1^k \left(\{f(x)\}^2+1\right)dx &= \int_1^k \{3-(x-1)^2\}\,dx\\ &= \left[\,3x-\frac{1}{3}(x-1)^3\,\right]_1^k\\ &= 3(k-1)-\frac{1}{3}(k-1)^3\\ &= 3\sqrt{2}-\frac{1}{3}(\sqrt{2})^3=\frac{7\sqrt{2}}{3},\end{aligned}$$

$$2\int_1^k f(x)\,dx=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi,$$

$$\int_1^k \frac{k^2}{x^2}\,dx=\left[-\frac{k^2}{x}\right]_1^k=k(k-1)=2+\sqrt{2}$$

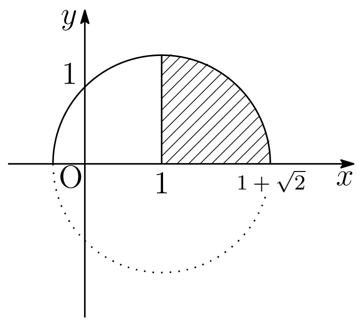
これらを $(*)$ に代入して，整理すると

$$\frac{V}{\pi}=\pi+\frac{4\sqrt{2}}{3}-2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{V=\pi\left(\pi+\frac{4\sqrt{2}}{3}-2\right)}$$

別解 (3) $y=\sqrt{2-(x-1)^2}$ とおくと

$$(x-1)^2+y^2=2$$

したがって，求める定積分の値は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$S=\frac{1}{4}\pi(\sqrt{2}\,)^2=\frac{\pi}{2}$$

補足 上の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積は

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}\right)^3=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$$

図の斜線部分は，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ にあるから，上の図形の重心の y 座標 h は，パップス・ギュルダンの定理 $(V=2\pi hS)$ により [1]

$$h=\frac{V}{2\pi S}=\frac{\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}}{2\pi\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$$

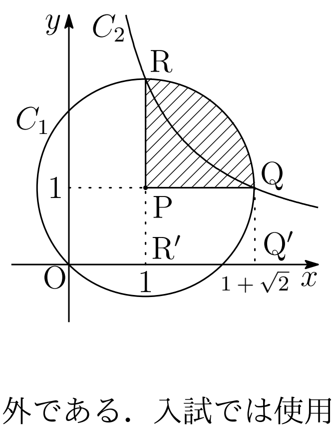
図形の対称性により，重心の x 座標 d は

$$d=1+h=1+\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$$

したがって，斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積 V_0 は

$$V_0=2\pi dS=2\pi\left(1+\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\right)\cdot\frac{\pi}{2}=\pi\left(\pi+\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積も V_0 に等しい．
また，長方形 $\mathrm{PQQ'R'}$ を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体は，半径 1，高さ $\sqrt{2}$ の円柱であるから，$f(x)=\sqrt{2-(x-1)^2}$ について，次が成り立つ．



$$\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\{f(x)+1\}^2\,dx=V_0+\sqrt{2}\pi$$

パップス・ギュルダンの定理は，高校数学の範囲外である．入試では使用できないが，便利な検算法である．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 2 次方程式 $x^2 - p_n x + q_n = 0$ の解は

$$x = \frac{p_n \pm \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n}}{2}$$

これが放物線 $y = x^2 - p_n x + q_n$ と x 軸との共有点の x 座標であるから，これらの差をとることにより

$$\ell_n = \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n} \quad \cdots (*)$$

$y = x^2 - p_n x + q_n$ を変形すると

$$y = \left(x - \frac{p_n}{2}\right)^2 - \frac{{p_n}^2 - 4q_n}{4}$$

よって，頂点の y 座標は $\quad -\dfrac{{p_n}^2 - 4q_n}{4} = \boldsymbol{-\dfrac{{\ell_n}^2}{4}}$

(2) $S_n = \dfrac{1}{6}{\ell_n}^3$ であるから $\qquad \dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\dfrac{\ell_{n+1}}{\ell_n}\right)^3$

$\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3$ より $\quad \dfrac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} = \dfrac{(n+2)\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}}$

したがって $\qquad \dfrac{\ell_{n+1}}{(n+2)\sqrt{n+1}} = \dfrac{\ell_n}{(n+1)\sqrt{n}}$

ゆえに $\quad \dfrac{\ell_n}{(n+1)\sqrt{n}} = \dfrac{\ell_1}{2} = \dfrac{\sqrt{{p_1}^2 - 4q_1}}{2} = 1 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{\ell_n = (n+1)\sqrt{n}}$

(3) $(*)$ を平方すると $\qquad {\ell_n}^2 = {p_n}^2 - 4q_n$

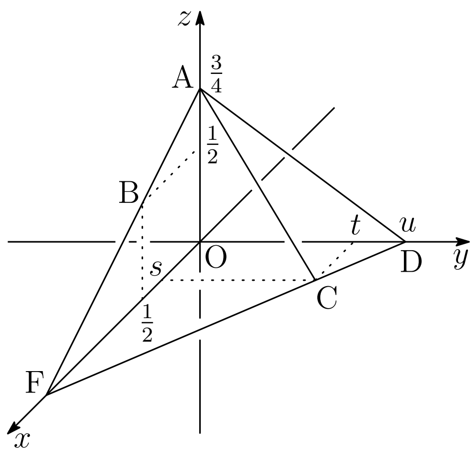
これに $p_n = n\sqrt{n}$ および (2) の結果を代入すると

$$(n+1)^2 n = n^3 - 4q_n \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{2q_n}{n^2} = 1 + \frac{1}{2n}$$

よって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty} n\log\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2点 $\mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通る直線と x 軸との交点を F とすると，実数 k を用いて



$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$= \left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}\right) + k\left(\frac{1}{2},\ 0, -\frac{1}{4}\right)$$
$$= \left(\frac{k}{2},\ 0,\ \frac{3}{4} - \frac{k}{4}\right)$$

F は x 軸上の点であるから

$$\frac{3}{4} - \frac{k}{4} = 0 \quad これを解いて \quad k = 3 \quad よって \quad \boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$$

(2) 3点 A，B，C の定める平面は，3点 A，F，C の定める平面でもある．
C は直線 FD 上の点であるから，$u = 0$ とすると，C は x 軸上の点となり，条件に反する．ゆえに，$u \neq 0$．xy 平面上の直線 FD の方程式は

$$\frac{2}{3}x + \frac{y}{u} = 1$$

点 C はこの直線上の点であるから　$\dfrac{2}{3}s + \dfrac{t}{u} = 1 \quad \cdots①$

$s > 0$，$t > 0$，$s + t = 1$ より，$s = 1 - t > 0$　ゆえに　$0 < t < 1$

$s = 1 - t$ を ① に代入すると

$$\frac{2}{3}(1 - t) + \frac{t}{u} = 1 \quad ゆえに \quad u = \frac{3t}{2t + 1} > 0$$

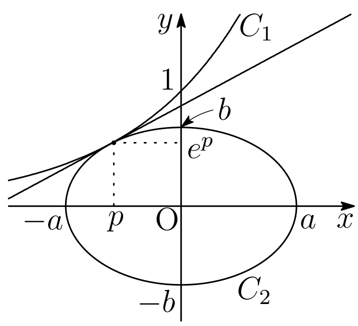
また　$1 - u = 1 - \dfrac{3t}{2t + 1} = \dfrac{1 - t}{2t + 1} > 0$　よって　$0 < u < 1$

(3) $\mathrm{D}\left(0,\ \dfrac{3t}{2t + 1},\ 0\right)$ は，OE を $12:1$ に内分するから，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{12}{13}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より

$$\left(0,\ \frac{3t}{2t + 1},\ 0\right) = \frac{12}{13}(0,\ 1,\ 0) \quad ゆえに \quad \frac{3t}{2t + 1} = \frac{12}{13}$$

これを解いて　$\boldsymbol{t = \dfrac{4}{5}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 点 $(p,\ e^p)$ は C_2 上の点であるから



$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{e^{2p}}{b^2}=1 \quad \cdots ①$$

C_2 上の点 $(p,\ e^p)$ における接線の方程式は

$$\frac{px}{a^2}+\frac{e^p y}{b^2}=1$$

すなわち　　$y=-\dfrac{b^2p}{a^2e^p}x+\dfrac{b^2}{e^p}$

$y=e^x$ を微分すると　　$y'=e^x$

この直線の傾きが C_1 上の点 $(p,\ e^p)$ における接線の傾きに等しいから

$$-\frac{b^2p}{a^2e^p}=e^p \quad ゆえに \quad \frac{e^{2p}}{b^2}=-\frac{p}{a^2} \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$\frac{p^2}{a^2}-\frac{p}{a^2}=1 \quad 整理すると \quad p^2-p-a^2=0$$

$p<0$ に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{p=\dfrac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}}$

(2) (1) の結果から

$$p+a=\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}+a=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1+4a^2}-2a}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+4a^2}+2a}\right)$$

よって　　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+4a^2}+2a}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(3) ② より，$b^2=-\dfrac{a^2e^{2p}}{p}$ であるから

$$\frac{b^2e^{2a}}{a}=-\frac{a^2e^{2p}}{p}\cdot\frac{e^{2a}}{a}=-\frac{ae^{2p+2a}}{p}=\frac{a}{a-(p+a)}e^{2(p+a)}$$

したがって，(2) の結果を利用して

$$\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{a}{a-(p+a)}e^{2(p+a)}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{a}(p+a)}e^{2(p+a)}=\boldsymbol{e}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) m 種類の文字から 2 種類の文字を選らぶ場合の総数は

$$_m\mathrm{C}_2 = \frac{m(m-1)}{2} \quad (\text{通り})$$

特定の 2 種類の文字列，例えば，a，b を 1 列に並べる場合の総数は 2^n 通りある．この中で a だけが 1 列に並ぶ場合が 1 通りと，b だけが 1 列に並ぶ場合が 1 通りある．したがって，両方の文字が並ぶ場合の総数は

$$2^n - 2 \quad (\text{通り}) \quad \cdots ①$$

よって，求める場合の数は

$$\frac{m(m-1)}{2} \times (2^n - 2) = \boldsymbol{m(m-1)(2^{n-1}-1)} \quad (\text{通り})$$

(2) 重複を許して，a，b，c の 3 種類の文字を 1 列に並べる場合の総数は 3^n 通りある．この内，1 種類の文字だけからなるものが 3 通りあり，2 種類の文字からなる場合の数は，(1) の結果に $m = 3$ を代入して $6(2^{n-1}-1)$ 通りある．したがって，a，b，c すべての文字を含む文字列の総数は

$$3^n - 3 - 6(2^{n-1}-1) = \boldsymbol{3^n - 3\cdot 2^n + 3} \quad (\text{通り})$$

(3) (i) n 人を 1 グループとする場合の総数は　　1 通り

(ii) n 人を a，b の 2 グループに分ける場合の総数は，① の結果から

$$2^n - 2 \quad (\text{通り})$$

このとき，a，b のグループの区別をなくすと

$$\frac{2^n - 2}{2!} = 2^{n-1} - 1 \quad (\text{通り})$$

(iii) n 人を a，b，c の 3 グループに分ける場合の総数は，(2) の結果から

$$3^n - 3\cdot 2^n + 3 \quad (\text{通り})$$

このとき，a，b，c のグループの区別をなくすと

$$\frac{3^n - 3\cdot 2^n + 3}{3!} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}$$

(i)〜(iii) から，求める確率 p_n は

$$p_n = \frac{2^{n-1}-1}{1 + (2^{n-1}-1) + \dfrac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}} = \boldsymbol{\frac{2^n - 2}{3^{n-1} + 1}}$$

(4) $p_n \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき $(n \geqq 3)$，(3) の結果から

$$\frac{2^n-2}{3^{n-1}+1} \leqq \frac{1}{3} \quad \text{整理すると} \quad 3^{n-1}-3{\cdot}2^n+7 \geqq 0 \quad \cdots(*)$$

$f(n)=3^{n-1}-3{\cdot}2^n+7$ とおくと

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^2-3{\cdot}2^3+7=-8 \\ f(4) &= 3^3-3{\cdot}2^4+7=-14 \\ f(5) &= 3^4-3{\cdot}2^5+7=-8 \\ f(6) &= 3^5-3{\cdot}2^6+7=58 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} f(n+1)-f(n) &= (3^n-3{\cdot}2^{n+1}+7)-(3^{n-1}-3{\cdot}2^n+7) \\ &= 2{\cdot}3^{n-1}-3{\cdot}2^n = 2^n\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3\right\} \end{aligned}$$

したがって　$f(3)>f(4)<f(5)<f(6)<\cdots$

よって，$(*)$ を満たす n の範囲は　$\boldsymbol{n \geqq 6}$

解説

異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び，1 列に並べるとき，k 種類の文字を含む文字列の総数を ${}_n\mathrm{Q}_k$ とすると $(1 \leqq k \leqq m)$，次が成立する．

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{Q}_1 &= 1 \\ {}_n\mathrm{Q}_2 &= 2^n-{}_2\mathrm{C}_1{\cdot}{}_n\mathrm{Q}_1 \\ {}_n\mathrm{Q}_3 &= 3^n-{}_3\mathrm{C}_1{\cdot}{}_n\mathrm{Q}_1-{}_3\mathrm{C}_2{\cdot}{}_n\mathrm{Q}_2 \\ {}_n\mathrm{Q}_4 &= 4^n-{}_4\mathrm{C}_1{\cdot}{}_n\mathrm{Q}_1-{}_4\mathrm{C}_2{\cdot}{}_n\mathrm{Q}_2-{}_4\mathrm{C}_3{\cdot}{}_n\mathrm{Q}_3 \\ {}_n\mathrm{Q}_5 &= 5^n-{}_5\mathrm{C}_1{\cdot}{}_n\mathrm{Q}_1-{}_5\mathrm{C}_2{\cdot}{}_n\mathrm{Q}_2-{}_5\mathrm{C}_3{\cdot}{}_n\mathrm{Q}_3-{}_5\mathrm{C}_4{\cdot}{}_n\mathrm{Q}_4 \\ &\vdots \\ {}_n\mathrm{Q}_k &= k^n-\sum_{j=1}^{k-1}{}_k\mathrm{C}_j{\cdot}{}_n\mathrm{Q}_j \end{aligned}$$

${}_n\mathrm{Q}_1=1$ より，${}_n\mathrm{Q}_2=2^n-2$ となり，これらを用いて (本題 (2) の計算)

$${}_n\mathrm{Q}_3=3^n-{}_3\mathrm{C}_1{\cdot}1-{}_3\mathrm{C}_2{\cdot}(2^n-2)=3^n-3{\cdot}2^n+3$$

例 1 n 個並べたときに丁度 3 種類の文字がそろう確率を $P_3(n)$ とすると

$$P_3(n) = \frac{3 \times {}_{n-1}\mathrm{Q}_2}{3^n} = \frac{3(2^{n-1}-2)}{3^n} = \frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}$$

また，文字が 3 種類そろうまで並べる文字数の期待値を E_3 とすると

$$\begin{aligned} E_3 &= \sum_{n=3}^{\infty} nP_3(n) = \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot \frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} - 1 - 2\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} - 1\right\} = \frac{11}{2} \quad (\text{個}) \end{aligned}$$

補足 $|x| < 1$ のとき，$1 + x + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ を微分すると

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - 1$$

この計算は，次の公式[2] を利用すると簡単に求めることができる．

Coupon collector's problem

m 種類の文字すべてがそろうまで並べる文字数の期待値 E_m は

$$E_m = m\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$$

実際 $\quad E_3 = 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{2}$

例 2 サイコロを投げて，すべての目がそろうまで投げる回数の期待値 (期待回数) は

$$E_6 = 6\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{147}{10}$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2012.pdf (p.12 に証明)