平成 26 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

1 a，b を実数，$a>0$ として，行列 $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}$ の定める 1 次変換を f とする．f によって，点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ が点 P_1 に移され，点 P_1 が点 P_2 に移されるものとする．P が線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の中点であるとき，次の問いに答えよ．

(1) a，b を求めよ．

(2) ある実数 c に対して $c\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=(v_1,\ v_2)$ とすると，

$$A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．c を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PP}_1}=(w_1,\ w_2)$ とする．すべての自然数 n に対して

$$A^n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=(-2)^n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ．

(4) (2) と (3) の v_1，v_2，w_1，w_2 に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s(v_1,\ v_2)+t(w_1,\ w_2)$ となる実数 s，t を求め，$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を n を用いて表せ．ただし，n は自然数である．

2 二つの関数 $f(x)=x\sin x$，$g(x)=\sqrt{3}x\cos x$ について次の問いに答えよ．ただし，(3) と (4) において，a および $h(x)$ は (2) で定めたものとする．

(1) 2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の共有点のうち，x 座標が $-\pi \leqq x \leqq \pi$ であるものをすべて求めよ．

(2) (1) で求めた共有点のうち，x 座標が正である点を $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ とする．点 A における曲線 $y=g(x)$ の接線を $y=h(x)$ と表す．$h(x)$ を求めよ．

(3) $0 \leqq x \leqq a$ のとき，$h(x) \geqq g(x)$ であることを示せ．

(4) $0 \leqq x \leqq a$ の範囲において，y 軸，曲線 $y=g(x)$，および直線 $y=h(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

3 四面体OABCにおいて$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$とする．$\triangle\mathrm{OAB}$の重心をF，$\triangle\mathrm{OAC}$の重心をGとし，辺OAの中点をMとする．また，$\angle\mathrm{BOC}=2\theta$とする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FG}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{BC}}$であることを示せ．

(3) $\triangle\mathrm{MBC}$の面積をθを用いて表せ．

4 $\alpha>1$とする．数列$\{a_n\}$を

$$a_1=\alpha,\quad a_{n+1}=\sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}}\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

によって定める．次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $a_n>1\qquad(n=1,2,3,\cdots)$

(2) $\sqrt{x}-1\leqq\dfrac{1}{2}(x-1)\qquad$(ただし，$x\geqq 0$とする．)

(3) $a_n-1\leqq\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)\qquad(n=1,2,3,\cdots)$

5 1辺の長さが1の正六角形において，頂点を反時計回りにP_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6とする．1個のさいころを2回投げて，出た目を順にj，kとする．P_1，P_j，P_kが異なる3点となるとき，この3点を頂点とする三角形の面積をSとする．P_1，P_j，P_kが異なる3点とならないときは，$S=0$と定める．次の問いに答えよ．

(1) $S>0$となる確率を求めよ．

(2) Sが最大となる確率を求めよ．

(3) Sの期待値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP_1}} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{\mathrm{OP_2}} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-4 \\ -2a-2b \end{pmatrix}$

P が線分 $\mathrm{P_1P_2}$ の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}} + \overrightarrow{\mathrm{OP_2}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より

$$\begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2-4 \\ -2a-2b \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって　$a^2+a-6=0,\quad a+b+1=0$

$a>0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{a=2,\ b=-3}$

(2) (1) の結果から　$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$　また，$A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$c\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OP_1}} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$c\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OP_1}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ より　$\begin{pmatrix} c+2 \\ -2 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$　よって　$\boldsymbol{c=2}$

(3) $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{PP_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OP_1}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A+2E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ より　$(A+2E)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$

したがって　$A\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$　$\cdots$①

$$A^n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (-2)^n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

(i) ① より，$(*)$ は $n=1$ のとき成立する．

(ii) $n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$A^k \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (-2)^k \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

ゆえに　$A^{k+1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (-2)^k A \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (-2)^{k+1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

(i),(ii) より，$(*)$ はすべての自然数 n について成立する．

(4) (2),(3) で求めた結果から　$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(2),(3) の等式を利用して

$$\begin{aligned} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} A^n \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} A^n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}(-2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4-(-2)^n \\ -2-(-2)^{n+1} \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

■

2 (1) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ から y を消去すると

$$x\sin x-\sqrt{3}x\cos x=0 \quad ゆえに \quad 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ であるから $\qquad x=-\frac{2}{3}\pi,\ 0,\ \frac{\pi}{3}$

また $\qquad f\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi,\quad f(0)=0,\quad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

求める共有点は $\qquad \boldsymbol{\left(-\frac{2}{3}\pi,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right),\quad (0,\ 0),\quad \left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)}$

(2) (1) の結果から $\quad \mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$

$g(x)=\sqrt{3}x\cos x$ より $\quad g'(x)=\sqrt{3}(\cos x-x\sin x) \quad \cdots①$

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}-\pi}{2}$$

$y=g(x)$ 上の点 A における接線の方程式は

$$y-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}-\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \quad すなわち \quad y=\frac{\sqrt{3}-\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{6}$$

よって $\qquad \boldsymbol{h(x)=\frac{\sqrt{3}-\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{6}}$

(3) $a=\frac{\pi}{3}$，① より $\quad g''(x)=-\sqrt{3}(2\sin x+x\cos x) \quad \cdots②$

$$\begin{aligned}g(x)-g(a)&=\int_a^x g'(t)\,dt=-\int_a^x (x-t)'g'(t)\,dt\\&=-\Big[\,(x-t)g'(t)\,\Big]_a^x+\int_a^x (x-t)g''(t)\,dt\\&=g'(a)(x-a)-\int_x^a (x-t)g''(t)\,dt\end{aligned}$$

$h(x)=g'(a)(x-a)+g(a)$ であるから

$$h(x)-g(x)=\int_x^a (x-t)g''(t)\,dt$$

② より，$0\leqq x\leqq t\leqq a$ のとき，$(x-t)g''(t)\geqq 0$ であるから

$$h(x)-g(x)=\int_x^a (x-t)g''(t)\,dt\geqq 0 \quad よって \quad h(x)\geqq g(x)$$

(4) (2),(3) の結果から，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\{h(x)-g(x)\}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}-\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{6}-\sqrt{3}\,x\cos x\right)dx$$

$$=\left[\frac{\sqrt{3}-\pi}{4}x^2+\frac{\pi^2}{6}x-\sqrt{3}\,(x\sin x+\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi^3}{36}+\frac{\sqrt{3}}{36}\pi^2-\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

■

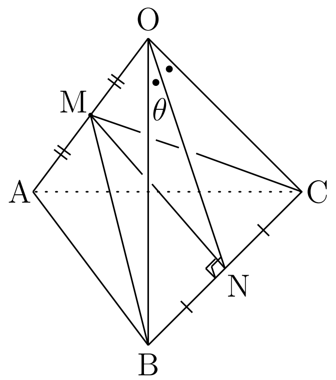
$\boxed{3}$ (1) $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ であるから，これと (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{FG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})-\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\qquad \text{よって}\quad \overrightarrow{\mathrm{FG}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

(3) $\triangle$OAB は 1 辺の長さが 1 の正三角形であるから



$$\mathrm{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

BC の中点を N とすると

$$\mathrm{BN}=\sin\theta\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{BC}=2\sin\theta$$

$$\mathrm{MN}=\sqrt{\mathrm{BM}^2-\mathrm{BN}^2}=\sqrt{\frac{3}{4}-\sin^2\theta}$$

よって　$\triangle\mathrm{MBC}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\cdot 2\sin\theta\sqrt{\frac{3}{4}-\sin^2\theta}=\boldsymbol{\sin\theta\sqrt{\frac{3}{4}-\sin^2\theta}}$

別解 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$ より

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2},\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=\cos 2\theta$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{MC}}|^2=\frac{3}{4},\quad \overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\cos 2\theta-\frac{1}{4}$$

よって　$\triangle\mathrm{MBC}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\cos 2\theta-\frac{1}{4}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(1-\cos 2\theta)\left(\cos 2\theta+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sin\theta\sqrt{2\cos 2\theta+1}$$

■

4 (1) 漸化式

$$a_1 = \alpha > 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

より，$a_n > 0$．また，上式から　$a_{n+1}{}^2 - 1 = \dfrac{2a_n}{a_n+1} - 1$

ゆえに　$a_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}(a_n - 1) \quad \cdots (*)$

したがって　$a_n - 1 > 0$ のとき　$a_{n+1} - 1 > 0$

$a_1 - 1 > 0$ であるから，すべての自然数 n について

$$a_n - 1 > 0 \quad \text{すなわち} \quad a_n > 1$$

(2) $\dfrac{1}{2}(x-1) - (\sqrt{x} - 1) = \dfrac{1}{2}(x - 2\sqrt{x} + 1) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)^2 \geqq 0$

よって　$\sqrt{x} - 1 \leqq \dfrac{1}{2}(x - 1)$

(3) 漸化式および (2) の結果から

$$a_{n+1} - 1 = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}} - 1 \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{2a_n}{a_n+1} - 1\right) = \frac{1}{2(a_n+1)}(a_n - 1)$$

(1) の結果から　$\dfrac{1}{2(a_n+1)} \leqq \dfrac{1}{4}$　ゆえに　$a_{n+1} - 1 \leqq \dfrac{1}{4}(a_n - 1)$

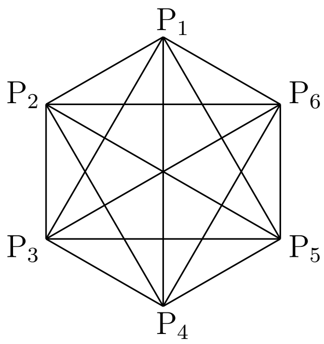
よって　$a_n - 1 \leqq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(a_1 - 1) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha - 1)$

別解 $a_n > 1$ から　$\dfrac{1}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)} \leqq \dfrac{1}{4}$　$(*)$ より　$a_{n+1} - 1 \leqq \dfrac{1}{4}(a_n - 1)$

■

5 (1) $S>0$ となるのは，3 点 P_1，P_j，P_k が異なるときであるから，$(j,\ k)$ の組の総数は，2，3，4，5，6 の 5 個から 2 個取り出して並べる順列の総数である．よって，求める確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{P}_2}{6^2}=\frac{5\cdot4}{36}=\boldsymbol{\frac{5}{9}}$$



(2) $\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k$ の面積 S が最大となるのは，(3) に示した表から分かるように，次の 2 組である．

$$(j,\ k)=(3,\ 5),\ (5,\ 3)$$

よって，求める確率は $\quad\dfrac{2}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{18}}$

(3) $a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ とおくと，$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k$ の面積 S は右の表のようになる．

$j \backslash k$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	a	$2a$	$2a$	a
3	0	a	0	$2a$	$3a$	$2a$
4	0	$2a$	$2a$	0	$2a$	$2a$
5	0	$2a$	$3a$	$2a$	0	a
6	0	a	$2a$	$2a$	a	0

X	0	a	$2a$	$3a$	合計
$P(X)$	$\frac{16}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

よって，求める期待値 $E(X)$ は

$$E(X)=0\cdot\frac{16}{36}+a\cdot\frac{6}{36}+2a\cdot\frac{12}{36}+3a\cdot\frac{2}{36}$$
$$=a=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$