

平成25年度 広島大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・医・歯・薬・教育(自然系・理数系)・
総合学科(理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5

1 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする. 座標平面上で原点 O を通り傾きが $\tan \theta$ の直線を l とし, 行列

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

の表す1次変換を f とする. 座標平面上に2点 P, Q がある. 次の問いに答えよ.

- (1) 線分 OP が直線 l と垂直であるとき, 1次変換 f による点 P の像を求めよ.
- (2) 1次変換 f による点 Q の像を R とする. このとき $|\overrightarrow{OR}| \leq |\overrightarrow{OQ}|$ が成り立つことを示せ. さらに等号が成立する場合を調べよ.
- (3) 1次変換 f による点 $(1, 1)$ の像を S とする. このとき $|\overrightarrow{OS}|$ が最大となる θ と最小となる θ をそれぞれ求めよ.

2 座標平面上の点で, x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という. n を3以上の自然数とし, 連立不等式

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq n$$

の表す領域を D とする. 格子点 $A(a, b)$ に対して, 領域 D 内の格子点 $B(c, d)$ が $|a - c| + |b - d| = 1$ を満たすとき, 点 B を点 A の隣接点という. 次の問いに答えよ.

- (1) 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が4であるものの個数を求めよ.
- (2) 領域 D から格子点を1つ選ぶとき, 隣接点の個数の期待値が3以上となるような n の範囲を求めよ. ただし, 格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする.
- (3) 領域 D から異なる格子点を2つ選ぶとき, 互いに隣接点である確率を求めよ. ただし, 異なる格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする.

3 座標平面上の2点 $A(0, 1)$, $B(t, 0)$ を考える. ただし, $t \geq 0$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 線分 AB を1辺とする正三角形は2つある. それぞれの正三角形について, 2点 A , B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ.
- (2) (1) で求めた2点のうち x 座標が小さい方を C とする. t を動かすとき, 点 C の軌跡を図示せよ.
- (3) k を定数とする. 点 B と直線 $y = kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで3点 A , B , P を頂点とする正三角形ができるとき, k の値の範囲を求めよ.

4 平面上の3点 O , A , B は $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 1$ かつ $\angle AOB = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) を満たすとする. 線分 AB の中点を M とする. $t > 1$ として, 点 C を $\vec{OC} = -t\vec{OM}$ となるように定める. $\triangle ABC$ の面積を S とする. 次の問いに答えよ.

- (1) S を t と θ を用いて表せ.
- (2) $|\vec{OC}| = 1$ のとき, S を t のみを用いて表せ.
- (3) $|\vec{OC}| = 1$ のとき, S が最大となる t の値を求めよ.

5 次の問いに答えよ. ただし, e は自然対数の底である.

- (1) $x \geq 2$ のとき, $x^4 e^{-3x} \leq 16e^{-6}$ を示せ. また, これを用いて $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-3x}$ を求めよ.
- (2) k を定数とする. $x > 0$ の範囲で方程式

$$xe^{-3x} = \frac{k}{x^2}$$

がちょうど2つの解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつような k の値の範囲を求めよ.

- (3) (2) の α, β が $\beta = 2\alpha$ を満たすとき, 曲線 $y = xe^{-3x}$ ($x > 0$) と曲線 $y = \frac{k}{x^2}$ ($x > 0$) で囲まれた部分の面積を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad A = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \text{ とおく. } A \text{ の固有方程式は}$$

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \quad \text{これを解いて } \lambda = 1, 0$$

A の $\lambda = 1, 0$ に対する固有ベクトルの1つをそれぞれ

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

とおく. 線分 OP が直線 l と垂直であるから, OP は \vec{v} に平行である.

したがって, f による P の像は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

補足 A は単位行列のスカラー倍ではない対称行列であるから, 2つの固有ベクトルは直交する¹.

$$(2) \quad \vec{OQ} = s\vec{u} + t\vec{v} \text{ とすると } \vec{OR} = s\vec{u}$$

$$\text{このとき } |\vec{OQ}| = \sqrt{s^2 + t^2}, \quad |\vec{OR}| = |s| \quad \text{したがって } |\vec{OR}| \leq |\vec{OQ}|$$

上式において, 等号が成立するのは, $t = 0$, すなわち, Q が l 上にあるときである.

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ を } \alpha, \beta \text{ を用いて } \vec{u}, \vec{v} \text{ の線形結合で表すと}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\text{これを解いて} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta + \sin \theta \\ -\sin \theta + \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって } \vec{OS} = (\cos \theta + \sin \theta)\vec{u} \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{OS}| = \sqrt{2} \left| \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ より, $|\vec{OS}|$ は, $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大となり, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ のとき最小となる. ■

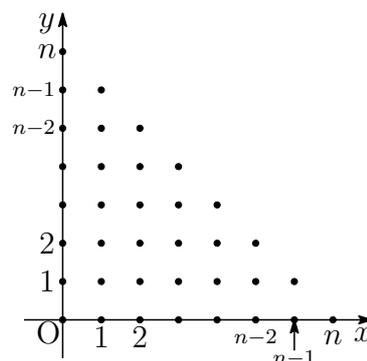
¹ http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri-2003.pdf (p14 を参照).

- 2 (1) 領域 D 内の格子点 (x, y) で隣接点の個数が4であるものは、 $1 \leq k \leq n-2$ とすると、直線 $x = k$ 上には、次の $n-k-1$ 個ある。

$$(k, 1), (k, 2), \dots, (k, n-k-1)$$

したがって、求める個数は

$$\sum_{k=1}^{n-2} (n-k-1) = \sum_{k=1}^{n-2} k = \frac{1}{2}(n-2)(n-1) \quad (\text{個})$$



- (2) 格子点 $(n, 0)$, $(0, n)$ は隣接点が1個ある。

$1 \leq k \leq n-1$ のとき、格子点 $(k, n-k)$, $(0, 0)$ は隣接点が2個ある。

$1 \leq k \leq n-1$ のとき、格子点 $(k, 0)$, $(0, k)$ は隣接点が3個ある。

(1) で示した格子点は隣接点が4個ある。

領域 D 内の格子点の個数を N とすると

$$N = \sum_{k=0}^n (n+1-k) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

したがって、隣接点の個数の期待値は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \left\{ 1 \cdot 2 + 2 \cdot n + 3 \cdot 2(n-1) + 4 \cdot \frac{1}{2}(n-2)(n-1) \right\} \\ &= \frac{2n(n+1)}{N} = \frac{2n(n+1)}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)} = \frac{4n}{n+2} \end{aligned}$$

この期待値が3以上であるとき $\frac{4n}{n+2} \geq 3$ よって $n \geq 6$

- (3) 互いに隣接点である組は、 $0 \leq k \leq n-1$ のとき、直線 $x = k$, $y = k$ 上にともに $n-k$ 個ある。したがって、その総数は

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2(n-k) = \sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

よって、求める確率は

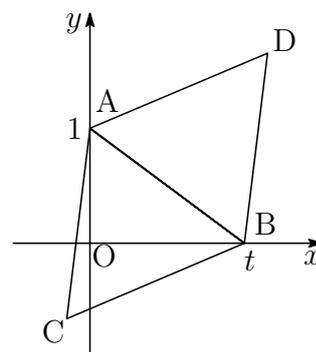
$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{{}_N C_2} &= n(n+1) \cdot \frac{2}{N(N-1)} = \frac{2n(n+1)}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2) \cdot \frac{1}{2}n(n+3)} \\ &= \frac{8}{(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$



3 (1) 求める点の位置ベクトルは

$$\begin{aligned} & \vec{OA} + \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \mp \sin 60^\circ \\ \pm \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \vec{AB} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \pm \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t \pm \sqrt{3} \\ \pm \sqrt{3}t + 1 \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

よって $\left(\frac{t \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{\pm \sqrt{3}t + 1}{2} \right)$ (複号同順)



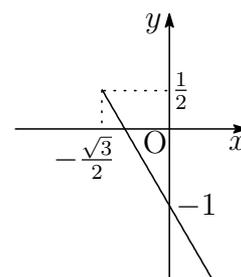
別解 複素数平面上に $A(i)$, $B(t)$ とると, 求める頂点は

$$i + (t - i)(\cos 60^\circ \pm i \sin 60^\circ) = \frac{t \pm \sqrt{3}}{2} + \frac{\pm \sqrt{3}t + 1}{2}i$$

(2) (1)の結果から, $C\left(\frac{t - \sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}t + 1}{2}\right)$

$$x = \frac{t - \sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{-\sqrt{3}t + 1}{2}, \quad t \geq 0 \text{ より}$$

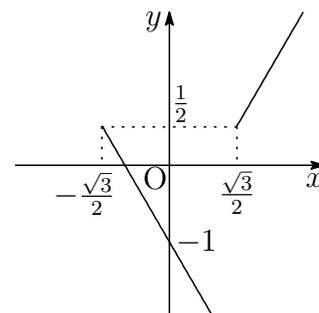
$$y = -\sqrt{3}x - 1 \quad \left(x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



よって, Cの軌跡は右の図のようになる.

(3) $D\left(\frac{t + \sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}t + 1}{2}\right)$ とおくと, (2)と同様にして, Dの描く軌跡の方程式は

$$y = \sqrt{3}x - 1 \quad \left(x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



CおよびDの軌跡は右の図のようになる.

$y = kx$ が2つの半直線と共有点をもつように k の値を定めるとよいから,

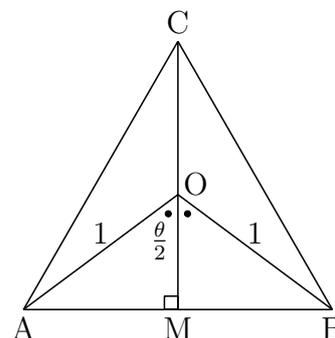
点 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ および (2) で求めた直線の傾きに注意して

$$k < -\sqrt{3}, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq k$$



4 (1) $\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta$
 $\vec{OC} = -t\vec{OM}$ より $OM : CM = 1 : 1+t$

よって $S = (1+t)\triangle OAB$
 $= (1+t) \cdot \frac{1}{2} \sin \theta$
 $= \frac{1}{2}(1+t) \sin \theta$



(2) $|\vec{OC}| = 1$ のとき $tOM = 1$

$\triangle OAM$ において $OM = \cos \frac{\theta}{2}$ ゆえに $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{t}$

$0 < \theta < \pi$ に注意して $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2}{t} \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}$

これを (1) の結果に代入して $S = \frac{t+1}{t} \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}$

(3) (2) の結果から $S^2 = \frac{(t+1)^3(t-1)}{t^4} = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{t}\right)$

$u = \frac{1}{t}$, $f(u) = S^2$ とおくと, $t > 1$ より

$$f(u) = (1+u)^3(1-u) \quad (0 < u < 1)$$

ゆえに $f'(u) = 3(1+u)^2(1-u) - (1+u)^3 = 2(1+u)^2(1-2u)$

u	(0)	...	$\frac{1}{2}$...	(1)
$f'(u)$		+	0	-	
$f(u)$		↗	極大	↘	

S が最大となるとき, $u = \frac{1}{2}$, すなわち $t = 2$

別解 4つの正の数 $\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{t}\right)$, $\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{t}\right)$, $\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{t}\right)$, $1 - \frac{1}{t}$ の相加重平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{3 \cdot \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{t}\right) + \left(1 - \frac{1}{t}\right)}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{1}{27} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{t}\right)}$$

ゆえに $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{t}\right) \leq \frac{27}{16}$ とくに, $\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{t}\right) = 1 - \frac{1}{t}$ のとき, すなわち, $t = 2$ のときに等号が成立し, このとき S は最大となる. ■

5 (1) $f(x) = x^4 e^{-3x}$ とおくと

$$f'(x) = 4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = x^3(4 - 3x)e^{-3x}$$

$x \geq 2$ のとき, $f'(x) < 0$ より, $f(x) \leq f(2)$ であるから

$$x^4 e^{-3x} \leq 16e^{-6} \quad \text{したがって} \quad 0 < x^3 e^{-3x} \leq \frac{16e^{-6}}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16e^{-6}}{x} = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-3x} = 0$$

補足 曲線 $y = e^{\frac{3}{4}(x-2)}$ 上の点 $(2, 1)$ における接線の方程式は $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

$$x \geq 2 \text{ のとき } e^{\frac{3}{4}(x-2)} \geq \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}(x-2) \geq \frac{x}{2}$$

$$\text{ゆえに } \left\{ e^{\frac{3}{4}(x-2)} \right\}^4 \geq \left(\frac{x}{2} \right)^4 \quad \text{よって} \quad x^4 e^{-3x} \leq 16e^{-6}$$

(2) $g(x) = x^3 e^{-3x}$ とおくと $g'(x) = 3x^2(1-x)e^{-3x}$

x	(0)	\cdots	1	\cdots
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$	(0)	\nearrow	e^{-3}	\searrow

$x > 0$ の範囲で $g(x) = k$, すなわち, $xe^{-3x} = \frac{k}{x^2}$ がちょうど 2 つの解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつ k の値の範囲は, 増減表および (1) の結果に注意して

$$0 < k < e^{-3}$$

(3) (2) の α, β が $\beta = 2\alpha$ であるから, $g(\alpha) = g(2\alpha) = k$ より

$$\alpha^3 e^{-3\alpha} = (2\alpha)^3 e^{-6\alpha} = k \quad \text{ゆえに} \quad e^\alpha = 2, \quad k = \frac{\alpha^3}{8} = \frac{(\log 2)^3}{8}$$

$\alpha \leq x \leq 2\alpha$ において, $xe^{-3x} \geq \frac{k}{x^2}$ であるから, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{2\alpha} \left(xe^{-3x} - \frac{k}{x^2} \right) dx = \left[-\frac{1}{9}(3x+1)e^{-3x} + \frac{\alpha^3}{8x} \right]_{\alpha}^{2\alpha} \\ &= -\frac{\alpha^2}{16} + \frac{\alpha}{32} + \frac{7}{576} = -\frac{(\log 2)^2}{16} + \frac{\log 2}{32} + \frac{7}{576} \end{aligned}$$

■