平成 25 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

1 $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．座標平面上で原点 O を通り傾きが $\tan\theta$ の直線を ℓ とし，行列

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

の表す 1 次変換を f とする．座標平面上に 2 点 P，Q がある．次の問いに答えよ．

(1) 線分 OP が直線 ℓ と垂直であるとき，1 次変換 f による点 P の像を求めよ．

(2) 1 次変換 f による点 Q の像を R とする．このとき $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}| \leqq |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ が成り立つことを示せ．さらに等号が成立する場合を調べよ．

(3) 1 次変換 f による点 $(1,\ 1)$ の像を S とする．このとき $|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|$ が最大となる θ と最小となる θ をそれぞれ求めよ．

2 座標平面上の点で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．n を 3 以上の自然数とし，連立不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad x + y \leqq n$$

の表す領域を D とする．格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して，領域 D 内の格子点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ が $|a-c| + |b-d| = 1$ を満たすとき，点 B を点 A の隣接点という．次の問いに答えよ．

(1) 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ．

(2) 領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき，隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ．ただし，格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする．

(3) 領域 D から異なる格子点を 2 つ選ぶとき，互いに隣接点である確率を求めよ．ただし，異なる格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする．

3 座標平面上の 2 点 A$(0,\ 1)$，B$(t,\ 0)$ を考える．ただし，$t \geqq 0$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 線分 AB を 1 辺とする正三角形は 2 つある．それぞれの正三角形について，2 点 A，B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ．

(2) (1) で求めた 2 点のうち x 座標が小さい方を C とする．t を動かすとき，点 C の軌跡を図示せよ．

(3) k を定数とする．点 B と直線 $y = kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A，B，P を頂点とする正三角形ができるとき，k の値の範囲を求めよ．

4 平面上の 3 点 O，A，B は $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1$ かつ $\angle\mathrm{AOB} = \theta\ (0 < \theta < \pi)$ を満たすとする．線分 AB の中点を M とする．$t > 1$ として，点 C を $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となるように定める．$\triangle$ABC の面積を S とする．次の問いに答えよ．

(1) S を t と θ を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1$ のとき，S を t のみを用いて表せ．

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1$ のとき，S が最大となる t の値を求めよ．

5 次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) $x \geqq 2$ のとき，$x^4e^{-3x} \leqq 16e^{-6}$ を示せ．また，これを用いて $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3e^{-3x}$ を求めよ．

(2) k を定数とする．$x > 0$ の範囲で方程式

$$xe^{-3x} = \frac{k}{x^2}$$

がちょうど 2 つの解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ をもつような k の値の範囲を求めよ．

(3) (2) の $\alpha,\ \beta$ が $\beta = 2\alpha$ を満たすとき，曲線 $y = xe^{-3x}\ (x > 0)$ と曲線 $y = \dfrac{k}{x^2}\ (x > 0)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $A = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$ とおく．A の固有方程式は

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \lambda = 1,\ 0$$

A の $\lambda = 1,\ 0$ に対する固有ベクトルの 1 つをそれぞれ

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおく．線分 OP が直線 ℓ と垂直であるから，OP は $\vec{v}$ に平行である．

したがって，f による P の像は $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

補足 A は単位行列のスカラー倍ではない対称行列であるから，2 つの固有ベクトルは直交する[1]．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\vec{u} + t\vec{v}$ とすると $\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}} = s\vec{u}$

このとき $\quad |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \sqrt{s^2+t^2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = |s| \quad$ したがって $\quad |\overrightarrow{\mathrm{OR}}| \leqq |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$

上式において，等号が成立するのは，$t = 0$，すなわち，**Q が $\boldsymbol{\ell}$ 上にあるときである．**

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を α，β を用いて $\vec{u}$，$\vec{v}$ の線形結合で表すと

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

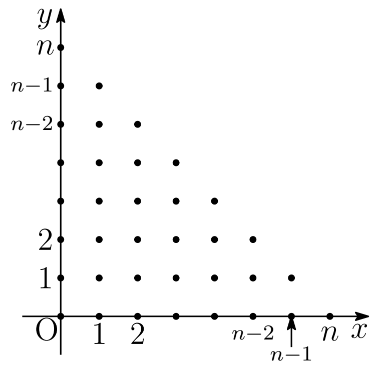
これを解いて $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta + \sin\theta \\ -\sin\theta + \cos\theta \end{pmatrix}$

したがって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OS}} = (\cos\theta + \sin\theta)\vec{u} \quad$ ゆえに $\quad |\overrightarrow{\mathrm{OS}}| = \sqrt{2}\left|\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

$-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|$ は，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$ **のとき最大となり，**$\boldsymbol{\theta = -\dfrac{\pi}{4}}$ **のとき最小となる．** ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2003.pdf (p14 を参照)．

2 (1) 領域 D 内の格子点 $(x,\ y)$ で隣接点の個数が4であるものは，$1 \leqq k \leqq n-2$ とすると，直線 $x=k$ 上には，次の $n-k-1$ 個ある．



$$(k,\ 1),\ (k,\ 2),\ \cdots,\ (k,\ n-k-1)$$

したがって，求める個数は

$$\sum_{k=1}^{n-2}(n-k-1) = \sum_{k=1}^{n-2} k = \boldsymbol{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)} \quad \textbf{(個)}$$

(2) 格子点 $(n,\ 0)$，$(0,\ n)$ は隣接点が1個ある．

$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき，格子点 $(k,\ n-k)$，$(0,\ 0)$ は隣接点が2個ある．

$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき，格子点 $(k,\ 0)$，$(0,\ k)$ は隣接点が3個ある．

(1) で示した格子点は隣接点が4個ある．

領域 D 内の格子点の個数を N とすると

$$N = \sum_{k=0}^{n}(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

したがって，隣接点の個数の期待値は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N}\left\{1\cdot2 + 2\cdot n + 3\cdot2(n-1) + 4\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\right\} \\ =\ & \frac{2n(n+1)}{N} = \frac{2n(n+1)}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)} = \frac{4n}{n+2} \end{aligned}$$

この期待値が3以上であるとき　$\dfrac{4n}{n+2} \geqq 3$　よって　$\boldsymbol{n \geqq 6}$

(3) 互いに隣接点である組は，$0 \leqq k \leqq n-1$ のとき，直線 $x=k$，$y=k$ 上にともに $n-k$ 個ある．したがって，その総数は

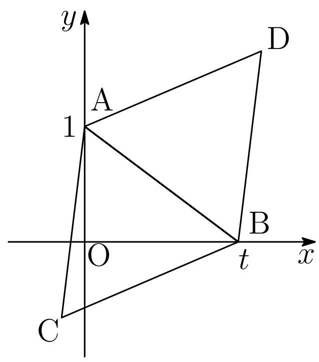
$$\sum_{k=0}^{n-1} 2(n-k) = \sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{{}_N\mathrm{C}_2} &= n(n+1)\cdot\frac{2}{N(N-1)} = \frac{2n(n+1)}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\cdot\frac{1}{2}n(n+3)} \\ &= \boldsymbol{\frac{8}{(n+2)(n+3)}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 求める点の位置ベクトルは



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\begin{pmatrix}\cos 60^\circ & \mp\sin 60^\circ\\ \pm\sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\-1\end{pmatrix}$$

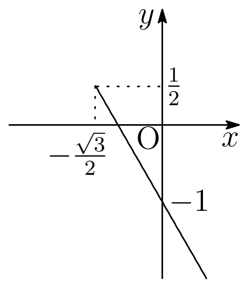
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}t\pm\sqrt{3}\\ \pm\sqrt{3}t+1\end{pmatrix}\quad\text{(複号同順)}$$

よって $\displaystyle \boldsymbol{\left(\frac{t\pm\sqrt{3}}{2},\ \frac{\pm\sqrt{3}t+1}{2}\right)}$ **(複号同順)**

別解 複素数平面上に $\mathrm{A}(i)$，$\mathrm{B}(t)$ とると，求める頂点は

$$i+(t-i)(\cos 60^\circ\pm i\sin 60^\circ)=\frac{t\pm\sqrt{3}}{2}+\frac{\pm\sqrt{3}t+1}{2}i$$

(2) (1) の結果から，$\mathrm{C}\left(\dfrac{t-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-\sqrt{3}t+1}{2}\right)$

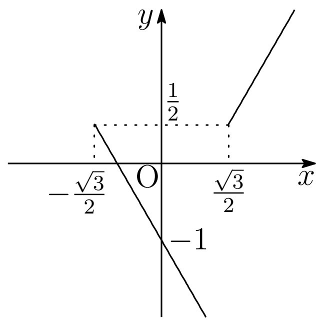


$x=\dfrac{t-\sqrt{3}}{2}$，$y=\dfrac{-\sqrt{3}t+1}{2}$，$t\geqq 0$ より

$$y=-\sqrt{3}x-1\quad\left(x\geqq-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって，C の軌跡は右の図のようになる．

(3) $\mathrm{D}\left(\dfrac{t+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}t+1}{2}\right)$ とおくと，(2) と同様にして，D の描く軌跡の方程式は



$$y=\sqrt{3}x-1\quad\left(x\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

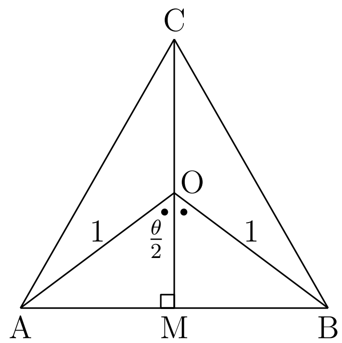
C および D の軌跡は右の図のようになる．

$y=kx$ が 2 つの半直線と共有点をもつように k の値を定めるとよいから，点 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ および (2) で求めた直線の傾きに注意して

$$\boldsymbol{k<-\sqrt{3},\quad -\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $\triangle \mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\cdot 1^2 \sin\theta = \dfrac{1}{2}\sin\theta$



$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ より　$\mathrm{OM} : \mathrm{CM} = 1 : 1 + t$

よって　$S = (1+t)\triangle\mathrm{OAB}$

$$= (1+t)\cdot\frac{1}{2}\sin\theta$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(1+t)\sin\theta}$$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1$ のとき　$t\mathrm{OM} = 1$

$\triangle\mathrm{OAM}$ において　$\mathrm{OM} = \cos\dfrac{\theta}{2}$　ゆえに　$\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{t}$

$0 < \theta < \pi$ に注意して　$\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{2}{t}\sqrt{1 - \dfrac{1}{t^2}}$

これを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{S = \dfrac{t+1}{t}\sqrt{1 - \dfrac{1}{t^2}}}$

(3) (2) の結果から　$S^2 = \dfrac{(t+1)^3(t-1)}{t^4} = \left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^3\left(1 - \dfrac{1}{t}\right)$

$u = \dfrac{1}{t}$，$f(u) = S^2$ とおくと，$t > 1$ より

$$f(u) = (1+u)^3(1-u) \quad (0 < u < 1)$$

ゆえに　$f'(u) = 3(1+u)^2(1-u) - (1+u)^3 = 2(1+u)^2(1-2u)$

u	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

S が最大となるとき，$u = \dfrac{1}{2}$，すなわち　$\boldsymbol{t = 2}$

別解 4 つの正の数 $\dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)$，$\dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)$，$\dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)$，$1 - \dfrac{1}{t}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{3\cdot\dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{t}\right) + \left(1 - \dfrac{1}{t}\right)}{4} \geqq \sqrt[4]{\frac{1}{27}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^3\left(1 - \frac{1}{t}\right)}$$

ゆえに　$\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^3\left(1 - \dfrac{1}{t}\right) \leqq \dfrac{27}{16}$　とくに，$\dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{t}\right) = 1 - \dfrac{1}{t}$ のとき，すなわち，$\boldsymbol{t = 2}$ のときに等号が成立し，このとき S は最大となる． ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x) = x^4 e^{-3x}$ とおくと

$$f'(x) = 4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = x^3(4-3x)e^{-3x}$$

$x \geqq 2$ のとき，$f'(x) < 0$ より，$f(x) \leqq f(2)$ であるから

$$x^4 e^{-3x} \leqq 16e^{-6} \quad \text{したがって} \quad 0 < x^3 e^{-3x} \leqq \frac{16e^{-6}}{x}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{16e^{-6}}{x} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-3x} = \mathbf{0}$$

補足 曲線 $y = e^{\frac{3}{4}(x-2)}$ 上の点 $(2,\ 1)$ における接線の方程式は　$y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$

$x \geqq 2$ のとき　$e^{\frac{3}{4}(x-2)} \geqq \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}(x-2) \geqq \dfrac{x}{2}$

ゆえに　$\left\{e^{\frac{3}{4}(x-2)}\right\}^4 \geqq \left(\dfrac{x}{2}\right)^4$　よって　$x^4 e^{-3x} \leqq 16e^{-6}$

(2) $g(x) = x^3 e^{-3x}$ とおくと　$g'(x) = 3x^2(1-x)e^{-3x}$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$	(0)	$\nearrow$	e^{-3}	$\searrow$

$x > 0$ の範囲で $g(x) = k$，すなわち，$xe^{-3x} = \dfrac{k}{x^2}$ がちょうど 2 つの解 α，β $(\alpha < \beta)$ をもつ k の値の範囲は，増減表および (1) の結果に注意して

$$\boldsymbol{0 < k < e^{-3}}$$

(3) (2) の α，β が $\beta = 2\alpha$ であるから，$g(\alpha) = g(2\alpha) = k$ より

$$\alpha^3 e^{-3\alpha} = (2\alpha)^3 e^{-6\alpha} = k \quad \text{ゆえに} \quad e^\alpha = 2,\ \ k = \frac{\alpha^3}{8} = \frac{(\log 2)^3}{8}$$

$\alpha \leqq x \leqq 2\alpha$ において，$xe^{-3x} \geqq \dfrac{k}{x^2}$ であるから，求める面積を S とすると

$$S = \int_\alpha^{2\alpha} \left(xe^{-3x} - \frac{k}{x^2}\right) dx = \left[-\frac{1}{9}(3x+1)e^{-3x} + \frac{\alpha^3}{8x}\right]_\alpha^{2\alpha}$$
$$= -\frac{\alpha^2}{16} + \frac{\alpha}{32} + \frac{7}{576} = \boldsymbol{-\frac{(\log 2)^2}{16} + \frac{\log 2}{32} + \frac{7}{576}}$$

■