

平成24年度 広島大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・医・歯・薬・教育(自然系・理数系)・
総合学科(理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5

1 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す1次変換によって、2点 $P(1, 1)$, $Q(2, 2)$ は連立不等式 $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$ の表す領域内の点 P' , Q' にそれぞれ移されるものとする。ただし、 a, b, c, d は正の実数で $a > c$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) $a + b = 1$ および $c + d = 1$ が成り立つことを証明せよ。
 (2) 4点 $O(0, 0)$, $R(a, c)$, $S(a + b, c + d)$, $T(b, d)$ を頂点とする平行四辺形 $ORST$ の面積を p とするとき、次の式が成り立つことを証明せよ。

$$A \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}$$

- (3) 自然数 n に対して、 a_n, b_n, c_n, d_n を

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

で定める。このとき a_n, b_n, c_n, d_n を b, c, n および (2) の p を用いて表せ。

- (4) $A^3 = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$ となるように A を定めよ。

2 a を実数とし、 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ とおく。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数 n について $x_n = a$ となるとき、 a を求めよ。
 (2) $a < 1$ のとき、 $x_n < 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ。
 (3) $0 < a < 1$ のとき、 $x_n < x_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ。

3 関数 $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ の値を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ の増減、グラフの凹凸および変曲点を調べ、グラフの概形をかけ。
- (3) $\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ とおく。正の実数 t に対して、曲線 $y = f(x)$, 3直線 $x = t$, $x = 0$ および $y = \alpha$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。
- (4) $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$ の値を求めよ。

4 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。原点 O を中心とする単位円周上の異なる 3 点 A, B, C が条件

$$(\cos \theta)\overrightarrow{OA} + (\sin \theta)\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) 2つのベクトル \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} は垂直であることを証明せよ。
- (2) $|\overrightarrow{CA}|$, $|\overrightarrow{CB}|$ を θ を用いて表せ。
- (3) 三角形 ABC の周の長さ $AB + BC + CA$ を最大にする θ を求めよ。

5 n は自然数とし、点 P は次の規則にしたがって座標平面上を動くとする。

規則:

- (A) P は、はじめに点 $(1, 2)$ にある。
- (B) さいころを投げて 2 以下の目が出れば P は原点を中心に反時計回りに 120° 回転し、3 以上の目が出れば時計回りに 60° 回転する。
- (C) (B) を n 回繰り返す。

ただし、さいころの目の出方は同様に確からしいとする。次の問いに答えよ。

- (1) $n = 3$ のとき、出た目が 4, 1, 2 であったとする。このとき P が最後に移った点の座標を求めよ。
- (2) $n = 3$ のとき、 P が点 $(1, 2)$ にある確率を求めよ。
- (3) $n = 6$ のとき、 P が点 $(-1, -2)$ にある確率を求めよ。
- (4) $n = 3m$ のとき、 P が点 $(1, 2)$ にある確率を求めよ。ただし、 m は自然数とする。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \overrightarrow{OP'} = A\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OQ'} = A\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2a+2b \\ 2c+2d \end{pmatrix}$$

P' は連立不等式 $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$ の表す領域内の点であるから

$$\begin{cases} 1 \leq a+b \leq 2 \\ 1 \leq c+d \leq 2 \end{cases}$$

Q' は連立不等式 $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$ の表す領域内の点であるから

$$\begin{cases} 1 \leq 2a+2b \leq 2 \\ 1 \leq 2c+2d \leq 2 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \leq a+b \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq c+d \leq 1 \end{cases}$$

よって $a+b=1, c+d=1$

(2) $a > c$ および (1) の結果に注意すると

$$1-b > c \quad \text{ゆえに} \quad 1-b-c > 0$$

このとき、平行四辺形 ORST の面積が p であるから

$$\begin{aligned} p &= |ad-bc| = |(1-b)(1-c) - bc| \\ &= |1-b-c| = 1-b-c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad A \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-b & b \\ c & 1-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b(1-b-c) \\ -c(1-b-c) \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(3) \quad (1) \text{ の結果から} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{また (2) の結果から} \quad A^n \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} = p^n \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bp^n \\ -cp^n \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって} \quad A^n \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & bp^n \\ 1 & -cp^n \end{pmatrix}$$

よって $a_n = 1, b_n = bp^n, c_n = 1, d_n = -cp^n$

(4) ハミルトン・ケリーの定理を用いると

$$A^3 = \alpha A + \beta E$$

とかける (α, β は実数).

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと, A は E と F の線形結合で表されるから

$$A = xE + yF$$

とおく (x, y は実数). このとき, $F^2 = E$ に注意して

$$A^3 = (x^3 + 3xy^2)E + (3xy^2 + y^3)F$$

したがって $x^3 + 3xy^2 = \frac{14}{27}, \quad 3xy^2 + y^3 = \frac{13}{27}$

上の2式から $(x+y)^3 = 1, \quad (x-y)^3 = \frac{1}{27}$

ゆえに $x+y=1, \quad x-y=\frac{1}{3}$ これを解いて $x=\frac{2}{3}, \quad y=\frac{1}{3}$

よって $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$



- 2** (1) すべての n について $x_n = a$ となるとき, $x_{n+1} = f(x_n)$ に $x_n = a$ および $x_{n+1} = a$ を代入すると

$$a = f(a) \quad \text{ゆえに} \quad a = a^3 - 3a^2 + 3a$$

したがって $a(a-1)(a-2) = 0$ よって $a = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} (2) \quad x_n < 1 \text{ のとき} \quad x_{n+1} &= f(x_n) = x_n^3 - 3x_n^2 + 3x_n \\ &= 1 - (1 - 3x_n + 3x_n^2 - x_n^3) \\ &= 1 - (1 - x_n)^3 < 1 \end{aligned}$$

よって $a < 1$ のとき $x_n < 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} (3) \quad 0 < x_n < 1 \text{ のとき} \quad x_{n+1} &= f(x_n) = x_n^3 - 3x_n^2 + 3x_n \\ &= x_n(x_n - 1)(x_n - 2) + x_n > x_n \end{aligned}$$

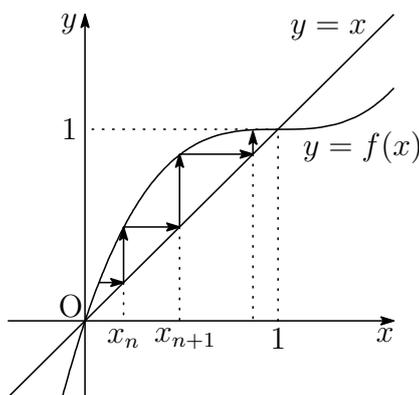
よって $0 < a < 1$ のとき $x_n < x_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

補足 (2) の計算から $1 - x_{n+1} = (1 - x_n)^3$

ゆえに $1 - x_n = (1 - a)^{3^{n-1}}$ よって $x_n = 1 - (1 - a)^{3^{n-1}}$

$0 < a < 1$ のとき, $0 < 1 - a < 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

(2), (3) の結果から, $0 < a < 1$ のとき, $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ であるから, $\{x_n\}$ は上に有界な単調増加列で, $\{x_n\}$ は収束する.



なお, $\{x_n\}$ が下に有界な単調減少列であるときも, $\{x_n\}$ は収束する. ■

$$\boxed{3} \quad (1) \quad f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \text{ より } \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x} + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

$$\quad \quad \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

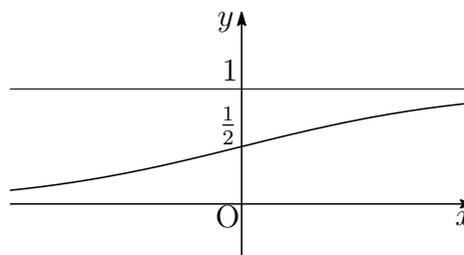
$$(2) \quad f(x) = 1 - \frac{1}{1+e^x} \text{ より } \quad f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{(1+e^x)^2} \text{ より}$$

$$f''(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{2e^x}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

したがって、 $y = f(x)$ の凹凸およびグラフの概形は次のようになる。

x	\dots	0	\dots
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\curvearrowright	$\frac{1}{2}$	\curvearrowleft



変曲点は $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, (1) の結果から、漸近線は $y = 0$, $y = 1$.

(3) (1) の結果より、 $\alpha = 1$ であるから

$$S(t) = \int_0^t \{1 - f(x)\} dx = \int_0^t \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx$$

$$= \left[x - \log(1 + e^x) \right]_0^t = t - \log \frac{1 + e^t}{2} = \log \frac{2e^t}{1 + e^t}$$

(4) (3) の結果から

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \log \frac{2e^t}{1 + e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \log \frac{2}{e^{-t} + 1} = \log 2$$

■

4 (1) $(\cos \theta)\vec{OA} + (\sin \theta)\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ より

$$|(\cos \theta)\vec{OA} + (\sin \theta)\vec{OB}|^2 = |\vec{OC}|^2$$

ゆえに $(\cos^2 \theta)|\vec{OA}|^2 + (\sin 2\theta)\vec{OA} \cdot \vec{OB} + (\sin^2 \theta)|\vec{OB}|^2 = |\vec{OC}|^2$

$|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 1$ であるから

$$\cos^2 \theta + (\sin 2\theta)\vec{OA} \cdot \vec{OB} + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (\sin 2\theta)\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $\sin 2\theta \neq 0$ であるから $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ よって $\vec{OA} \perp \vec{OB}$

(2) CA, CB の中点をそれぞれ M, N とすると

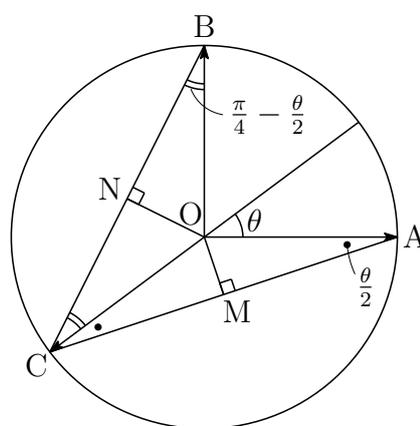
$$\angle OAM = \frac{\theta}{2}, \quad \angle OBN = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

ゆえに $AM = \cos \frac{\theta}{2}$

$$BN = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$$

よって $|\vec{CA}| = 2AM = 2 \cos \frac{\theta}{2}$

$$|\vec{CB}| = 2BN = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$$



別解 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 1$, $\vec{OA} \perp \vec{OB}$ であるから $\vec{OA} = (1, 0)$, $\vec{OB} = (0, 1)$
 とおくと, $(\cos \theta)\vec{OA} + (\sin \theta)\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ より $\vec{OC} = (-\cos \theta, -\sin \theta)$

ゆえに $\vec{CA} = (1 + \cos \theta, \sin \theta)$, $\vec{CB} = (\cos \theta, 1 + \sin \theta)$

よって $|\vec{CA}| = \sqrt{2 + 2\cos \theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2}$

$$|\vec{CB}| = \sqrt{2 + 2\sin \theta} = \sqrt{2 + 2\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$$

(3) (1), (2) の結果から

$$\begin{aligned} AB + BC + CA &= \sqrt{2} + 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) + 2 \cos \frac{\theta}{2} \\ &= \sqrt{2} + 4 \cos \frac{\pi}{8} \cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $-\frac{\pi}{8} < \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{8}$ であるから, 求める θ は

$$\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$



- 5 (1) 2以下の目が2回、3以上の目が1回であるから、点Pは原点を中心に

$$120^\circ \times 2 + (-60^\circ) = 180^\circ$$

だけ回転するから $(-1, -2)$

- (2) $n = 3$ より、2以下の目が出た回数を k 回とすると ($0 \leq k \leq 3$)、点Pは原点を中心に

$$120^\circ \times k + (-60^\circ) \times (3 - k) = 180^\circ \times (k - 1)$$

だけ回転するから、点Pが元の位置 $(1, 2)$ に戻るのは $k = 1, 3$ したがって、求める確率は

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{13}{27}$$

- (3) $n = 6$ より、2以下の目が出た回数を k 回とすると ($0 \leq k \leq 6$)、点Pは原点を中心に

$$120^\circ \times k + (-60^\circ) \times (6 - k) = 180^\circ \times (k - 2)$$

だけ回転するから、点Pが $(-1, -2)$ にあるのは $k = 1, 3, 5$ したがって、求める確率は

$${}_6C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^5 + {}_6C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + {}_6C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{364}{729}$$

- (4) $n = 3m$ より、2以下の目が出た回数を k 回とすると ($0 \leq k \leq 3m$)、点Pは原点を中心に

$$120^\circ \times k + (-60^\circ) \times (3m - k) = 180^\circ \times (k - m)$$

だけ回転するから、 $n = 3m$ のとき、Pは点 $(1, 2)$ または点 $(-1, -2)$ にある。このとき、Pが点 $(1, 2)$ 、点 $(-1, -2)$ にある確率をそれぞれ p_m 、 q_m とすると、(2)の結果に注意して

$$(*) \begin{cases} p_{m+1} = \frac{13}{27}p_m + \frac{14}{27}q_m \\ q_{m+1} = \frac{14}{27}p_m + \frac{13}{27}q_m \end{cases} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

が成立する ($p_0 = 1, q_0 = 0$)。

ゆえに $p_{m+1} + q_{m+1} = p_m + q_m$

$$p_{m+1} - q_{m+1} = -\frac{1}{27}(p_m - q_m)$$

すなわち $p_m + q_m = p_0 + q_0 = 1$

$$p_m - q_m = \left(-\frac{1}{27}\right)^m (p_0 - q_0) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{3m}$$

したがって $p_m = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{3m} \right\}$

よって、求める確率は $\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right\}$ ■