平成24年度　広島大学　２次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・医・歯・薬・教育(自然系・理数系)・総合学科(理科系)・生物生産

1 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す1次変換によって，2点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$，$\mathrm{Q}(2,\ 2)$ は連立不等式 $1 \leqq x \leqq 2$，$1 \leqq y \leqq 2$ の表す領域内の点 P'，Q' にそれぞれ移されるものとする．ただし，a，b，c，d は正の実数で $a > c$ を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $a + b = 1$ および $c + d = 1$ が成り立つことを証明せよ．

(2) 4点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{R}(a,\ c)$，$\mathrm{S}(a+b,\ c+d)$，$\mathrm{T}(b,\ d)$ を頂点とする平行四辺形ORSTの面積を p とするとき，次の式が成り立つことを証明せよ．

$$A\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}$$

(3) 自然数 n に対して，a_n，b_n，c_n，d_n を

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

で定める．このとき a_n，b_n，c_n，d_n を b，c，n および(2)の p を用いて表せ．

(4) $A^3 = \dfrac{1}{27}\begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$ となるように A を定めよ．

2 a を実数とし，$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ とおく．数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n について $x_n = a$ となるとき，a を求めよ．

(2) $a < 1$ のとき，$x_n < 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

(3) $0 < a < 1$ のとき，$x_n < x_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ について，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x)$，$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ の値を求めよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ の増減，グラフの凹凸および変曲点を調べ，グラフの概形をかけ．

(3) $\alpha = \lim_{x\to\infty} f(x)$ とおく．正の実数 t に対して，曲線 $y = f(x)$，3 直線 $x = t$，$x = 0$ および $y = \alpha$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ．

(4) $\lim_{t\to\infty} S(t)$ の値を求めよ．

$\boxed{4}$ $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．原点 O を中心とする単位円周上の異なる 3 点 A，B，C が条件

$$(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は垂直であることを証明せよ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|$ を θ を用いて表せ．

(3) 三角形 ABC の周の長さ AB + BC + CA を最大にする θ を求めよ．

$\boxed{5}$ n は自然数とし，点 P は次の規則にしたがって座標平面上を動くとする．

規則:

(A) P は，はじめに点 (1, 2) にある．

(B) さいころを投げて 2 以下の目が出れば P は原点を中心に反時計回りに 120° 回転し，3 以上の目が出れば時計回りに 60° 回転する．

(C) (B) を n 回繰り返す．

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする．次の問いに答えよ．

(1) $n = 3$ のとき，出た目が 4，1，2 であったとする．このとき P が最後に移った点の座標を求めよ．

(2) $n = 3$ のとき，P が点 (1, 2) にある確率を求めよ．

(3) $n = 6$ のとき，P が点 $(-1, -2)$ にある確率を求めよ．

(4) $n = 3m$ のとき，P が点 (1, 2) にある確率を求めよ．ただし，m は自然数とする．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = A\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ'}} = A\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} 2a+2b \\ 2c+2d \end{pmatrix}$

$\mathrm{P'}$ は連立不等式 $1 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq 2$ の表す領域内の点であるから

$$\begin{cases} 1 \leqq a+b \leqq 2 \\ 1 \leqq c+d \leqq 2 \end{cases}$$

$\mathrm{Q'}$ は連立不等式 $1 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq 2$ の表す領域内の点であるから

$$\begin{cases} 1 \leqq 2a+2b \leqq 2 \\ 1 \leqq 2c+2d \leqq 2 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \leqq a+b \leqq 1 \\ \frac{1}{2} \leqq c+d \leqq 1 \end{cases}$$

よって　$a+b=1,\ c+d=1$

(2) $a > c$ および (1) の結果に注意すると

$$1-b > c \quad \text{ゆえに} \quad 1-b-c > 0$$

このとき，平行四辺形 ORST の面積が p であるから

$$\begin{aligned} p &= |ad-bc| = |(1-b)(1-c)-bc| \\ &= |1-b-c| = 1-b-c \end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-b & b \\ c & 1-c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b(1-b-c) \\ -c(1-b-c) \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) (1) の結果から　$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　ゆえに　$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

また (2) の結果から　$A^n\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} = p^n\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bp^n \\ -cp^n \end{pmatrix}$

したがって　$A^n\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & bp^n \\ 1 & -cp^n \end{pmatrix}$

よって　$\boldsymbol{a_n = 1,\ b_n = bp^n,\ c_n = 1,\ d_n = -cp^n}$

(4) ハミルトン・ケリーの定理を用いると

$$A^3 = \alpha A + \beta E$$

とかける ($\alpha,\ \beta$ は実数).

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，A は E と F の線形結合で表されるから

$$A = xE + yF$$

とおく (x，y は実数)．このとき，$F^2 = E$ に注意して

$$A^3 = (x^3 + 3xy^2)E + (3xy^2 + y^3)F$$

したがって　$x^3 + 3xy^2 = \dfrac{14}{27}$，$3xy^2 + y^3 = \dfrac{13}{27}$

上の 2 式から　$(x+y)^3 = 1,\ \ (x-y)^3 = \dfrac{1}{27}$

ゆえに　$x + y = 1,\ x - y = \dfrac{1}{3}$　これを解いて　$x = \dfrac{2}{3},\ y = \dfrac{1}{3}$

よって　$\boldsymbol{A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$ ■

2 (1) すべての n について $x_n = a$ となるとき，$x_{n+1} = f(x_n)$ に $x_n = a$ および $x_{n+1} = a$ を代入すると

$$a = f(a) \quad \text{ゆえに} \quad a = a^3 - 3a^2 + 3a$$

したがって　$a(a-1)(a-2) = 0$　よって　$\boldsymbol{a = 0,\ 1,\ 2}$

(2) $x_n < 1$ のとき

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) = {x_n}^3 - 3{x_n}^2 + 3x_n \\ &= 1 - (1 - 3x_n + 3{x_n}^2 - {x_n}^3) \\ &= 1 - (1 - x_n)^3 < 1 \end{aligned}$$

よって　$a < 1$ のとき　$x_n < 1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(3) $0 < x_n < 1$ のとき

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) = {x_n}^3 - 3{x_n}^2 + 3x_n \\ &= x_n(x_n - 1)(x_n - 2) + x_n > x_n \end{aligned}$$

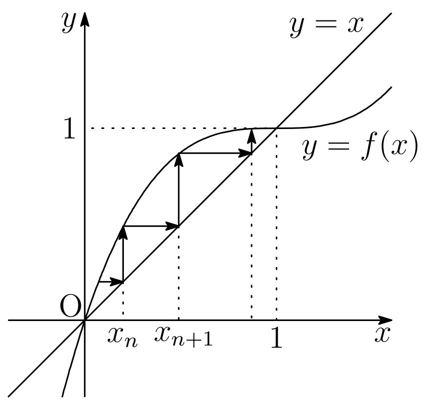
よって　$0 < a < 1$ のとき　$x_n < x_{n+1}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

補足 (2) の計算から　$1 - x_{n+1} = (1 - x_n)^3$

ゆえに　$1 - x_n = (1 - a)^{3^{n-1}}$　よって　$x_n = 1 - (1 - a)^{3^{n-1}}$

$0 < a < 1$ のとき，$0 < 1 - a < 1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

(2)，(3) の結果から，$0 < a < 1$ のとき，$0 < x_n < x_{n+1} < 1$ であるから，$\{x_n\}$ は上に有界な単調増加列で，$\{x_n\}$ は収束する．



なお，$\{x_n\}$ が下に有界な単調減少列であるときも，$\{x_n\}$ は収束する．■

$\boxed{3}$ (1) $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ より $\quad \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{0+1}=\mathbf{1}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{0}{1+0}=\mathbf{0}$$

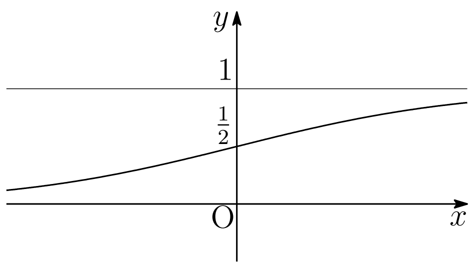
(2) $f(x)=1-\dfrac{1}{1+e^x}$ より $\quad f'(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}>0$

$f'(x)=\dfrac{1}{1+e^x}-\dfrac{1}{(1+e^x)^2}$ より

$$f''(x)=-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}+\frac{2e^x}{(1+e^x)^3}=\frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

したがって，$y=f(x)$ の凹凸およびグラフの概形は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	⤴	$\frac{1}{2}$	⤵



変曲点は $\left(\mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$，(1) の結果から，漸近線は $y=0,\ y=1$.

(3) (1) の結果より，$\alpha=1$ であるから

$$\begin{aligned} S(t)&=\int_0^t\{1-f(x)\}\,dx=\int_0^t\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx\\ &=\Big[\,x-\log(1+e^x)\,\Big]_0^t=t-\log\frac{1+e^t}{2}=\boldsymbol{\log\frac{2e^t}{1+e^t}}\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から

$$\lim_{t\to\infty}S(t)=\lim_{t\to\infty}\log\frac{2e^t}{1+e^t}=\lim_{t\to\infty}\log\frac{2}{e^{-t}+1}=\mathbf{\log 2}$$

■

4 (1) $(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ より

$$|(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

ゆえに　$(\cos^2\theta)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+(\sin 2\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(\sin^2\theta)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

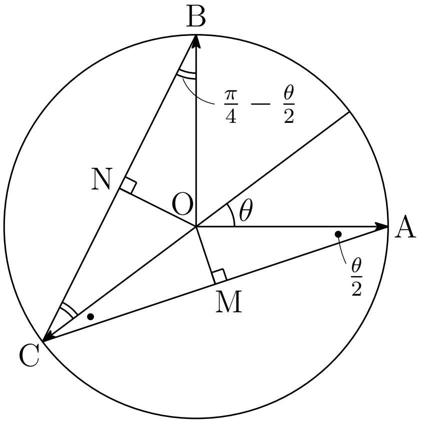
$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ であるから

$\cos^2\theta+(\sin 2\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\sin^2\theta=1$　ゆえに　$(\sin 2\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin 2\theta\neq 0$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2) CA，CB の中点をそれぞれ M，N とすると

$$\angle\mathrm{OAM}=\frac{\theta}{2},\quad \angle\mathrm{OBN}=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$$



ゆえに　$\mathrm{AM}=\cos\dfrac{\theta}{2}$

$\mathrm{BN}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=2\mathrm{AM}=\boldsymbol{2\cos\dfrac{\theta}{2}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=2\mathrm{BN}=\boldsymbol{2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)}$

別解 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0)$，　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ 1)$

とおくと，$(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(-\cos\theta,-\sin\theta)$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(1+\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(\cos\theta,\ 1+\sin\theta)$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{2+2\cos\theta}=2\cos\dfrac{\theta}{2}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=\sqrt{2+2\sin\theta}=\sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}&=\sqrt{2}+2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+2\cos\frac{\theta}{2}\\&=\sqrt{2}+4\cos\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\end{aligned}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$-\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{\pi}{8}$ であるから，求める θ は

$$\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}=0\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4}}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 2 以下の目が 2 回，3 以上の目が 1 回であるから，点 P は原点を中心に

$$120^\circ \times 2 + (-60^\circ) = 180^\circ$$

だけ回転するから　$\mathbf{(-1, -2)}$

(2) $n = 3$ より，2 以下の目が出た回数を k 回とすると $(0 \leqq k \leqq 3)$，点 P は原点を中心に

$$120^\circ \times k + (-60^\circ) \times (3 - k) = 180^\circ \times (k - 1)$$

だけ回転するから，点 P が元の位置 $(1,\ 2)$ に戻るのは　$k = 1,\ 3$
したがって，求める確率は

$${}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \mathbf{\frac{13}{27}}$$

(3) $n = 6$ より，2 以下の目が出た回数を k 回とすると $(0 \leqq k \leqq 6)$，点 P は原点を中心に

$$120^\circ \times k + (-60^\circ) \times (6 - k) = 180^\circ \times (k - 2)$$

だけ回転するから，点 P が $(-1, -2)$ にあるのは　$k = 1,\ 3,\ 5$
したがって，求める確率は

$${}_6\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^5 + {}_6\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + {}_6\mathrm{C}_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \mathbf{\frac{364}{729}}$$

(4) $n = 3m$ より，2 以下の目が出た回数を k 回とすると $(0 \leqq k \leqq 3m)$，点 P は原点を中心に

$$120^\circ \times k + (-60^\circ) \times (3m - k) = 180^\circ \times (k - m)$$

だけ回転するから，$n = 3m$ のとき，P は点 $(1,\ 2)$ または点 $(-1, -2)$ にある．このとき，P が点 $(1,\ 2)$，点 $(-1, -2)$ にある確率をそれぞれ p_m，q_m とすると，(2) の結果に注意して

$$(*) \begin{cases} p_{m+1} = \dfrac{13}{27}p_m + \dfrac{14}{27}q_m \\ q_{m+1} = \dfrac{14}{27}p_m + \dfrac{13}{27}q_m \end{cases} \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成立する $(p_0 = 1,\ q_0 = 0)$．

ゆえに　$p_{m+1}+q_{m+1}=p_m+q_m$

$$p_{m+1}-q_{m+1}=-\frac{1}{27}(p_m-q_m)$$

すなわち　$p_m+q_m=p_0+q_0=1$

$$p_m-q_m=\left(-\frac{1}{27}\right)^m(p_0-q_0)=\left(-\frac{1}{3}\right)^{3m}$$

したがって　$p_m=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{3m}\right\}$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n}\right\}}$ ■