平成 23 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5

1 実数 a，b に対して，2 次正方行列 A と列ベクトル B を

$$A = \begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1+a & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix}$$

と定め，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．等式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$$

により，座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対し点 $\mathrm{P}'(x',\ y')$ が定まるものとする．次の問いに答えよ．

(1) $a = b = -1$ のとき，点 $\mathrm{P}'(3,\ 2)$ となる点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を求めよ．

(2) $A^2 = kE$ (k は実数) を満たすとき，a，k の値を求めよ．

(3) どんな点 P に対しても点 P′ が原点 O に一致しないための a，b の条件を求めよ．

2 次の問いに答えよ．

(1) $\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m，n は存在しないことを証明せよ．

(2) p，q を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ．

(3) $\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ．

3 次の問いに答えよ．

(1) a，b，c を定数とする．関数 $f(x) = a\cos^2 x + 2b\cos x\sin x + c\sin^2 x$ が定数となるための a，b，c の条件を求めよ．

(2) 関数

$$g(x) = 4\cos^2 x + 2\cos x\sin x + \sin^2 x - \frac{5}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}\right)$$

が最大値をとる x の値を θ とする．$\cos 2\theta$，$\sin 2\theta$ の値を求めよ．

(3) (2) の関数 $g(x)$ と θ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^\theta g(x)\,dx$ を求めよ．

4 平面上で，線分 AB を $1:2$ に内分する点を O とし，O を中心とする半径 OB の円を S，円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする．点 P は円 S の内部にあり，線分 BC 上にないものとする．円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{b}$，$\angle\mathrm{APB} = \theta$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(2) 点 P が円 S の内部にあることを用いて，$\cos\theta < \dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ．

(3) PQ の長さを $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，θ で表せ．

(4) $\mathrm{PA} = 3$，$\mathrm{PB} = 2$ とする．$\triangle\mathrm{QAB} = 3\triangle\mathrm{POB}$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を求めよ．

5 $\triangle\mathrm{ABC}$ の頂点は反時計回りに A，B，C の順に並んでいるとする．点 A を出発した石が，次の規則で動くとする．

> コインを投げて表が出たとき反時計回りに隣の頂点に移り，裏が出たときは動かない．コインを投げて表と裏の出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ とする．

コインを n 回投げたとき，石が点 A，B，C にある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする．次の問いに答えよ．

(1) a_1，b_1，c_1 の値を求めよ．

(2) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ．また，a_2，b_2，c_2 および a_3，b_3，c_3 の値を求めよ．

(3) a_n，b_n，c_n のうち 2 つの値が一致することを証明せよ．

(4) (3) において一致する値を p_n とするとき，p_n を n で表せ．

解答例

1 (1) $a=b=-1$ のとき，$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ゆえに $$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

したがって $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって $\mathbf{P}\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)$

(2) ハミルトン・ケリーの定理により $A^2-(a+2)A+(a^2+a-2)E=O$
これに $A^2=kE$ を代入すると

$$kE-(a+2)A+(a^2+a-2)E=O$$
$$(a+2)A=(k+a^2+a-2)E$$

$a+2=0$ のとき，$k+a^2+a-2=0$ であるから $a=-2,\ k=0$

$a+2\neq 0$ のとき，A は E のスカラー倍となり，A に反する．

よって $\boldsymbol{a=-2,\ k=0}$

(3) $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく．A が正則であるとき，$X=-A^{-1}B$ とすると，点 P' が原点に一致する．
したがって，$\det A=0$ は求める条件の必要条件である．
$\det A=0$ より $a^2+a-2=0$ これを解いて $a=-2,\ 1$

(i) $a=-2$ のとき

$$AX+B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix}$$
$$=(-x+2y+b)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$-x+2y+b=0$ をみたす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ をとると点 P' が原点に一致する．

(ii) $a=1$ のとき

$$AX+B=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2b\\b\end{pmatrix}$$
$$=(x+y)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$b\neq 0$ のとき，点 P′ は原点 O に一致しない．

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{a=1,\ b\neq 0}$ ■

2 (1) $\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ より　$2^{\frac{m}{n}}=3$　ゆえに　$2^m=3^n$

m，n は，自然数であるから，上式は素因数分解の一意性に反する．

よって，$\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m，n は存在しない．

補足 自然数 m，n に対し，$2^m=3^n$ の左辺は偶数，右辺は奇数であるから矛盾．

(2) $p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分が等しくなる自然数 p，q に対し $(p\neq q)$

$$p\log_2 3-q\log_2 3$$

は整数であるから，これを l とすると

$$(p-q)\log_2 3=l\quad ゆえに\quad \log_2 3=\frac{l}{p-q}$$

これは (1) の結果に反するので，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分が等しくなる自然数 p, q $(p\neq q)$ は存在しない．

(3) $8<9$，$243<256$，すなわち，$2^3<3^2$，$3^5<2^8$　ゆえに　$2^{\frac{3}{2}}<3<2^{\frac{8}{5}}$

したがって　$\dfrac{3}{2}<\log_2 3<\dfrac{8}{5}$　すなわち　$1.5<\log_2 3<1.6$

よって，$\log_2 3$ の小数第 1 位は　**5**

補足 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ ということを知っていれば

$$\log_2 3=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}$$

を計算することで，$1.5<\log_2 3<1.6$ を評価すればよいことが分かる．■

3 (1) $f(x) = a\cos^2 x + 2b\cos x\sin x + c\sin^2 x$

$f(0) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ より　$a = c$　ゆえに　$f(x) = c + b\sin 2x$

$f(x)$ は，定数であるから　$b = 0$　よって　$\boldsymbol{a = c,\ b = 0}$

(2)
$$\begin{aligned} g(x) &= 4\cos^2 x + 2\cos x\sin x + \sin^2 x - \frac{5}{2} \\ &= 4\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} + \sin 2x + \frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{5}{2} \\ &= \sin 2x + \frac{3}{2}\cos 2x = \frac{\sqrt{13}}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\cos 2x + \frac{2}{\sqrt{13}}\sin 2x\right) \end{aligned}$$

$\cos 2\theta = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$，$\sin 2\theta = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ とおくと $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\sqrt{13}}{2}(\cos 2x\cos 2\theta + \sin 2x\sin 2\theta) \\ &= \frac{\sqrt{13}}{2}\cos 2(x-\theta) \end{aligned}$$

上式より，$x = \theta$ で $g(x)$ は最大となる．

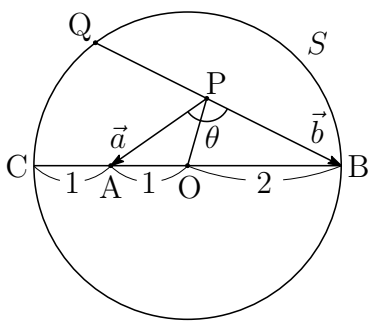
よって　$\boldsymbol{\cos 2\theta = \dfrac{3}{\sqrt{13}},\ \sin 2\theta = \dfrac{2}{\sqrt{13}}}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \int_0^\theta g(x)\,dx &= \int_0^\theta \frac{\sqrt{13}}{2}\cos 2(x-\theta)\,dx \\ &= \frac{\sqrt{13}}{4}\Big[\ \sin 2(x-\theta)\ \Big]_0^\theta \\ &= \frac{\sqrt{13}}{4}\sin 2\theta = \frac{\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

■

4 (1) O は線分 AB を 1 : 2 に内分する点であるから



$$\boldsymbol{\overrightarrow{PO} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}}$$

C は線分 AB を 1 : 4 に外分する点であるから

$$\overrightarrow{PC} = \frac{-4\vec{a} + \vec{b}}{1-4} = \boldsymbol{\frac{4\vec{a} - \vec{b}}{3}}$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \boldsymbol{\frac{-2\vec{a} + 2\vec{b}}{3}}$$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PO}}| < |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ であるから，$|2\vec{a}+\vec{b}| < |-2\vec{a}+2\vec{b}|$ より

$$|2\vec{a}+\vec{b}|^2 < |-2\vec{a}+2\vec{b}|^2 \quad \text{整理すると} \quad 4\vec{a}\cdot\vec{b} < |\vec{b}|^2$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ であるから

$$4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta < |\vec{b}|^2 \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta < \frac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$$

別解 $\angle\mathrm{CPB}$ は鈍角であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} < 0$ より

$$\frac{1}{3}(4\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b} < 0 \quad \text{整理すると} \quad 4\vec{a}\cdot\vec{b} < |\vec{b}|^2$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -k\vec{b}$ とおくと $(k>0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{QC}} = \overrightarrow{\mathrm{PC}} - \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3} - (-k\vec{b}) = \frac{1}{3}\{4\vec{a}+(3k-1)\vec{b}\}$$

$\overrightarrow{\mathrm{QC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{QC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = 0$ より

$$\frac{1}{3}\{4\vec{a}+(3k-1)\vec{b}\}\cdot\vec{b} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta + (3k-1)|\vec{b}|^2 = 0$$

k について解くと　$k = \dfrac{|\vec{b}| - 4|\vec{a}|\cos\theta}{3|\vec{b}|}$

よって　$\mathrm{PQ} = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = k|\vec{b}| = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}(|\vec{b}| - 4|\vec{a}|\cos\theta)}$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} = |\overrightarrow{\mathrm{BQ}}||\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$ であるから

$$\frac{4}{3}(\vec{a}-\vec{b})\cdot(-\vec{b}) = \mathrm{BQ}|\vec{b}| \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{BQ} = \frac{4}{3}(|\vec{b}| - |\vec{a}|\cos\theta)$$

よって　$\mathrm{PQ} = \mathrm{BQ} - \mathrm{BP} = \dfrac{4}{3}(|\vec{b}| - |\vec{a}|\cos\theta) - |\vec{b}| = \dfrac{1}{3}(|\vec{b}| - 4|\vec{a}|\cos\theta)$

(4) $\triangle\mathrm{QAB} = 3\triangle\mathrm{POB}$ より　$\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BA} = 3\mathrm{BP}\cdot\mathrm{BO}$

$\mathrm{BA} = \dfrac{3}{2}\mathrm{BO}$ であるから　$\mathrm{BQ} = 2\mathrm{BP}$　ゆえに　$\mathrm{PQ} = \mathrm{PB} = |\vec{b}| = 2$

これと $|\vec{a}| = \mathrm{PA} = 3$ を (3) の結果に代入すると

$$2 = \frac{1}{3}(2 - 4\cdot 3\cos\theta) \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta = -\frac{1}{3}$$

$\sin\theta > 0$ であるから　$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　$\triangle\mathrm{PAB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\sin\theta = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$ ■

5 (1) コインを 1 回投げたとき，石は点 A または点 B にあり，その確率はともに $\frac{1}{2}$ であるから

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{1}{2},\quad b_1 = \frac{1}{2},\quad c_1 = 0}$$

(2) 与えられた規則により

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n)} \\ \boldsymbol{b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)} \\ \boldsymbol{c_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n)} \end{cases}$$

(1) の結果を上の漸化式に順次適用すると

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}(a_1 + c_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 0\right) = \boldsymbol{\frac{1}{4}} \\ b_2 &= \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \\ c_2 &= \frac{1}{2}(b_1 + c_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 0\right) = \boldsymbol{\frac{1}{4}} \\ a_3 &= \frac{1}{2}(a_2 + c_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{4}} \\ b_3 &= \frac{1}{2}(a_2 + b_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{3}{8}} \\ c_3 &= \frac{1}{2}(b_2 + c_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{3}{8}} \end{aligned}$$

(3) 数学的帰納法により示す．

［1］$a_1 = b_1$ であるから，$n = 1$ のとき成立する．

［2］$n = k$ のとき，a_k，b_k，c_k のうち 2 つの値が一致するとき，(2) で求めた漸化式から

$$\begin{aligned} a_{k+1} - b_{k+1} &= -\frac{1}{2}(b_k - c_k) \\ b_{k+1} - c_{k+1} &= -\frac{1}{2}(c_k - a_k) \\ c_{k+1} - a_{k+1} &= -\frac{1}{2}(a_k - b_k) \end{aligned}$$

が成立するから，a_{k+1}，b_{k+1}，c_{k+1} のうち 2 つの値が一致する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，a_n，b_n，c_n のうち 2 つの値が一致する．

(4) $a_n + b_n + c_n = 1$ であるから，一致する 2 つの値が p_n であるとき，残りの 1 つは $1 - 2p_n$ である．3 つの値 p_n，p_n，$1 - 2p_n$ を (2) の漸化式に適用することにより

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}\{p_n + (1 - 2p_n)\} \quad \text{ゆえに} \quad p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{p_n - \frac{1}{3}\right\}$ は，初項 $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$$

■