

平成22年度 広島大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・医・歯・薬・教育(自然系・理数系)・
総合学科(理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5

1 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す1次変換 f によって、点 $P_1(1, 0)$ が点 $P_2(0, 3)$ に移され、点 P_2 が点 P_3 に、点 P_3 が点 $P_1(1, 0)$ にそれぞれ移されるとする。次の問いに答えよ。ただし、 a, b, c, d は実数である。

- (1) 行列 A を求めよ。
- (2) 自然数 n に対して A^n を求めよ。
- (3) $O(0, 0)$ とする。点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ が f によって点 Q に移されるとする。 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ のとき、ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ のとり得る値の範囲を求めよ。

2 p, a を実数の定数とする。多項式 $P(x) = x^3 - (2p + a)x^2 + (2ap + 1)x - a$ を $x - 3$ で割った余りが $10 - 6p$ であり、3次方程式 $P(x) = 0$ の実数解は a のみとする。次の問いに答えよ。

- (1) 実数の範囲で $P(x)$ を因数分解せよ。
- (2) a の値を求めよ。
- (3) 関数 $y = f(x)$ が極値をもたないときの p の値を求めよ。

3 $t > 1$ を満たす実数 t に対して、 $S(t) = \int_0^1 |xe^x - tx| dx$ とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で、方程式 $xe^x = tx$ を満たす x をすべて求めよ。
- (2) $S(t)$ を求めよ。
- (3) $S(t)$ を最小にする t の値を求めよ。

- 4 n は 2 以上の自然数とする. 袋の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている. この袋から無作為に玉を 1 個取り出し, それに書かれている数を自分の得点としたのち, 取り出した玉を袋に戻す. この試行を A, B, C の 3 人が順に行い, 3 人の中で最大の得点の人を勝者とする. たとえば, A, B, C の得点がそれぞれ 4, 2, 4 のときは A と C の 2 人が勝者であり, 3 人とも同じ得点のときは A, B, C の 3 人とも勝者である. 勝者が k 人 ($k = 1, 2, 3$) である確率を $P_n(k)$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 勝者が 3 人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ.
- (2) $n = 3$ の場合に勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ を求めよ.
- (3) 勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ.
- (4) $P_n(1) \geq 0.9$ となる最小の n を求めよ.

- 5 4 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を A とする. すなわち,

$$A = \{4k + 1 \mid k \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}\}$$

とする. 次の問いに答えよ.

- (1) x および y が A に属するならば, その積 xy も A に属することを証明せよ.
- (2) 0 以上の偶数 m に対して, 3^m は A に属することを証明せよ.
- (3) m, n を 0 以上の整数とする. $m+n$ が偶数ならば $3^m 7^n$ は A に属し, $m+n$ が奇数ならば $3^m 7^n$ は A に属さないことを証明せよ.
- (4) m, n を 0 以上の整数とする. $3^{2m+1} 7^{2n+1}$ の正の約数のうち A に属する数全体の和を m と n を用いて表せ.

解答例

- 1** (1) $f(P_1) = P_2, f(P_2) = P_3, f(P_3) = P_1$ より

$$f^3(P_1) = P_1, f^3(P_2) = P_2$$

$$B = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix} \text{ とおくと, } \det B = 3 \text{ であるから } A^3 B = B \cdots (*)$$

$$\text{ゆえに } (\det A)^3 \det B = \det B \quad \text{すなわち } \det A = 1$$

$$P_3 = f(P_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b \\ 3d \end{pmatrix}$$

$$f(P_1) = P_2, f(P_3) = P_1, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 3b \\ 0 & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3b \\ 0 & 3d \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3b \\ 0 & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3b & d \\ 3a & -c \end{pmatrix}$$

$$\text{上式から } 1 = -3b, 3b = d, 0 = 3a, 3d = -c$$

$$\text{ゆえに } a = 0, b = -\frac{1}{3}, c = 3, d = -1 \quad \text{よって} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- (2) (*) より $A^3 = E$ (E は単位行列)

$$(1) \text{ の結果から } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって} \quad A^n = \begin{cases} E & (n \equiv 0) \\ A & (n \equiv 1) \\ A^2 & (n \equiv 2) \end{cases} \pmod{3}$$

補足 $A^2 = A^{-1}$ から求めることもできる.

$$(3) \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \text{ より } \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \sin \theta \\ 3 \cos \theta - \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= \frac{8}{3} \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta = \frac{1}{6} (8 \sin 2\theta + 3 \cos 2\theta) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{73}}{6} \sin(2\theta + \alpha) - \frac{1}{2} \quad \left(\cos \alpha = \frac{8}{\sqrt{73}}, \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{73}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad -\frac{\sqrt{73}}{6} - \frac{1}{2} \leq \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq \frac{\sqrt{73}}{6} - \frac{1}{2}$$

■

- 2** (1) 多項式 $P(x) = x^3 - (2p + a)x^2 + (2ap + 1)x - a$
 3 次方程式 $P(x) = 0$ は、実数解 a をもつから $P(a) = 0$
 因数定理により、 $P(x)$ は $x - a$ を因数にもつから

$$P(x) = (x - a)(x^2 - 2px + 1)$$

- (2) $P(x)$ を $x - 3$ で割った余りが $10 - 6p$ であるから、剰余の定理により

$$P(3) = 10 - 6p \quad \text{ゆえに} \quad 6ap - 10a - 18p + 30 = 10 - 6p$$

$$\text{したがって} \quad (a - 2)(3p - 5) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

3 次方程式 $P(x) = 0$ の実数解は a のみであるから、(1) の結果より

$$x^2 - 2px + 1 = 0$$

は実数解をもたないから、係数について

$$D/4 = (-p)^2 - 1 \cdot 1 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad -1 < p < 1$$

上式および $\textcircled{1}$ から $\mathbf{a = 2}$

- (3) $P(x) = (x - 2)(x^2 - 2px + 1)$ であるから

$$P'(x) = 3x^2 - 2(2p + 2)x + 4p + 1$$

$y = P(x)$ が極値をもたないから、 $P'(x)$ の係数について

$$(2p + 2)^2 - 3(4p + 1) \leq 0$$

$$\text{したがって} \quad (2p - 1)^2 \leq 0 \quad \text{よって} \quad \mathbf{p = \frac{1}{2}}$$

別解 $P'(x) = (x - 1)(3x - 4p - 1)$ であるから

$$1 = \frac{4p + 1}{3} \quad \text{よって} \quad \mathbf{p = \frac{1}{2}}$$



3 (1) $xe^x = tx$ より $x(e^x - t) = 0$

よって $1 < t \leq e$ のとき $x = 0, \log t$

$e < t$ のとき $x = 0$

(2) $f(x) = tx - xe^x$ の原始関数の 1 つを $F(x) = \frac{tx^2}{2} - (x-1)e^x$ とすると

$$F(0) = 1, \quad F(\log t) = \frac{t}{2} \{ (\log t)^2 - 2 \log t + 2 \}, \quad F(1) = \frac{t}{2}$$

(i) $1 < t \leq e$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^1 |xe^x - tx| dx = \int_0^{\log t} (tx - xe^x) dx - \int_{\log t}^1 (tx - xe^x) dx \\ &= \left[F(x) \right]_0^{\log t} - \left[F(x) \right]_{\log t}^1 \\ &= 2F(\log t) - F(0) - F(1) \\ &= t \left\{ (\log t)^2 - 2 \log t + \frac{3}{2} \right\} - 1 \end{aligned}$$

(ii) $e < t$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^1 |xe^x - tx| dx = \int_0^1 (tx - xe^x) dx \\ &= \left[F(x) \right]_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{t}{2} - 1 \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から, $1 < t < e$ のとき

$$S'(t) = (\log t)^2 - 2 \log t + \frac{3}{2} + t \left\{ 2(\log t) \cdot \frac{1}{t} - \frac{2}{t} \right\} = (\log t)^2 - \frac{1}{2}$$

$e < t$ のとき $S'(t) > 0$

t	(1)	...	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	...	e	...
$S'(t)$		-	0	+		+
$S(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$

よって, $S(t)$ を最小にする t の値は $t = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$



- 4 (1) 勝者が3人であるのは、3人とも同じ数字の玉を取り出したときで、 n 通りであるから

$$P_n(3) = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

- (2) 勝者2人の選び方は ${}_3C_2$ 通りで、勝者と敗者の数字の選び方は ${}_3C_2$ 通りであるから

$$P_3(2) = \frac{{}_3C_2 \cdot {}_3C_2}{3^3} = \frac{1}{3}$$

- (3) 勝者2人の選び方は ${}_3C_2$ 通りで、勝者と敗者の数字の選び方は ${}_nC_2$ 通りであるから

$$P_n(2) = \frac{{}_3C_2 \cdot {}_nC_2}{n^3} = \frac{3(n-1)}{2n^2}$$

$P_n(1) + P_n(2) + P_n(3) = 1$ であるから

$$\begin{aligned} P_n(1) &= 1 - P_n(2) - P_n(3) = 1 - \frac{3(n-1)}{2n^2} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{2n^2 - 3n + 1}{2n^2} = \frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2} \end{aligned}$$

別解 勝者1人の選び方は ${}_3C_1$ 通りで、勝者が数字 k ($2 \leq k \leq n$)を選ぶ確率は $\frac{1}{n}$ で、2人の敗者が $k-1$ 以下の数字を選ぶ確率は $\frac{(k-1)^2}{n^2}$ であるから

$$\begin{aligned} P_n(1) &= {}_3C_1 \sum_{k=2}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{3}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{3}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) = \frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2} \end{aligned}$$

- (4) (3)の結果から、 $P_n(1) \geq 0.9$ のとき

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2} \geq \frac{9}{10} \quad \text{ゆえに} \quad n(15-n) \leq 5$$

上の第2式から $(n-1)(n-14) \geq 9 \quad \dots (*)$

$1 \leq n \leq 14$ のとき、 $(*)$ を満たす自然数 n は存在しない。

よって、 $(*)$ を満たす最小の自然数 n は **15**



5 (1) $x \in A, y \in A$ より, xy は自然数.

$$x \equiv 1, y \equiv 1 \pmod{4} \implies xy \equiv 1 \pmod{4} \text{ よって } xy \in A$$

(2) m が 0 以上の偶数であるから, 3^m は自然数.

$$3^m \equiv (-1)^m \equiv 1 \pmod{4} \text{ よって } 3^m \in A$$

(3) m, n は 0 以上の整数であるから, $3^m 7^n$ は自然数.

$$3^m 7^n \equiv (-1)^m (-1)^n \equiv (-1)^{m+n} \pmod{4}$$

$$m+n \text{ が偶数のとき } 3^m 7^n \equiv 1 \pmod{4} \text{ ゆえに } 3^m 7^n \in A$$

$$m+n \text{ が奇数のとき } 3^m 7^n \equiv -1 \pmod{4} \text{ ゆえに } 3^m 7^n \notin A$$

(4) (3) の結果により

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m 3^{2j} \sum_{k=0}^n 7^{2k} + \sum_{j=0}^m 3^{2j+1} \sum_{k=0}^n 7^{2k+1} \\ &= \sum_{j=0}^m 3^{2j} \sum_{k=0}^n 7^{2k} + 3 \cdot 7 \sum_{j=0}^m 3^{2j} \sum_{k=0}^n 7^{2k} = 22 \sum_{j=0}^m 3^{2j} \sum_{k=0}^n 7^{2k} \\ &= 22 \cdot \frac{3^{2m+2} - 1}{9 - 1} \cdot \frac{7^{2n+2} - 1}{49 - 1} \\ &= \frac{11}{192} (3^{2m+2} - 1)(7^{2n+2} - 1) \end{aligned}$$

■