

平成 21 年度 広島大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5

1 以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え、真の場合は証明を、偽の場合は反例を与えよ。

- (1) すべての 2 行 2 列の行列 A, B に対して, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ が成立する.
- (2) 2 行 2 列の行列 A が $A^2 = E$ を満たすならば, $A = E$ または $A = -E$ である. ただし, E は単位行列とする.
- (3) 微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a) = 0$ を満たすならば, $f(x)$ は $x = a$ において極値をとる.
- (4) n が 2 以上の自然数ならば, $1 + 2 + \cdots + n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある.

2 座標平面上の 3 点 $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(x, y)$ を考える. ただし $y > 0$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $\triangle ABC$ が二等辺三角形であるとする. そのとき x, y が満たす条件を求め, 点 C の存在範囲を図示せよ.
- (2) $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるとする. そのとき x, y が満たす条件を求め, 点 C の存在範囲を図示せよ.
- (3) 3 つの角 $\angle CAB, \angle ABC, \angle BCA$ をそれぞれ α, β, γ とし, 不等式

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする. そのとき x, y が満たす条件を求め, 点 C の存在範囲を図示せよ.

- (4) x, y が (3) の条件を満たすとき, γ がとりうる値の範囲を求めよ.

- 3 曲線 $y = e^x$ 上の点 $A(0, 1)$ における接線を ℓ とし、点 $B(0, 2)$ を通り直線 ℓ に平行な直線を m とする。直線 m と曲線 $y = e^x$ の 2 つの交点 P, Q の x 座標をそれぞれ α, β (ただし $\alpha < \beta$) とする。直線 $x = \alpha$ と直線 ℓ の交点を P' 、直線 $x = \beta$ と直線 ℓ の交点を Q' とする。次の問いに答えよ。

- (1) 平行四辺形 $PP'Q'Q$ の面積 S を α, β で表せ。
- (2) 直線 m と曲線 $y = e^x$ によって囲まれる図形の面積 T を α, β の多項式で表せ。
- (3) 線分 PQ の中点 R は第 2 象限にあることを示せ。
- (4) $\alpha + \beta > -1$ であることを示せ。

- 4 四面体 $OABC$ において、

$$\angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{2}, \quad \angle BOC = \frac{\pi}{3}, \quad OA = OB = 2, \quad OC = 1$$

とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え、 $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ とする。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、 $\vec{p}$ は実数 s, t を用いて

$$\vec{p} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

と表される。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{p} \cdot \vec{a}$, $\vec{p} \cdot \vec{b}$, $\vec{p} \cdot \vec{c}$ を s, t を用いて表せ。
- (2) 点 P が $\angle AOP = \angle BOP = \angle COP$ を満たすとき、 s, t の値を求めよ。
- (3) (2) の条件を満たす点 P について、直線 AP と直線 BC の交点を Q 、直線 BP と直線 AC の交点を R とする。 $BQ : QC$ および $AR : RC$ を求めよ。
- (4) (2) の条件を満たす点 P について、3 つの四面体 $OABP$, $OBCP$, $OCAP$ の体積の比を求めよ。

5 2人のプレーヤー A, B が対戦を繰り返すゲームを行う. 1回の対戦につき A が勝つ確率は p であり, B が勝つ確率は $1 - p$ であるとする (ただし $0 < p < 1$). A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている. 1回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る. 対戦を繰り返して一方のプレーヤーがすべての金貨を手に入れたとき, ゲームを終了する. ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする. ただし n は自然数とする.

- (1) P_4 を求めよ.
- (2) P_{2n-1} を求めよ.
- (3) P_{2n} を求めよ.
- (4) $2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ.
- (5) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ とする. p と S の大小関係を調べよ.

解答例

- 1 (1) 一般に $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \cdots (*)$$

が成立するのは, $AB = BA$ (交換法則) が成立するときに限る.

例えば, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$AB = B, \quad BA = O \text{ より } AB \neq BA$$

よって, すべての2行2列の行列 A, B について, $(*)$ は成立しない.

したがって, 本命題は偽である.

- (2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると, ハミルトン・ケリーの定理により

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

これに $A^2 = E$ を代入すると

$$(a+d)A = (ad-bc+1)E$$

- (i) $a+d \neq 0$ のとき, $A = kE$ とおくと (k は実数), $A^2 = E$ より

$$k^2 E = E \quad \text{ゆえに} \quad k = \pm 1 \quad \text{すなわち} \quad A = E \quad \text{または} \quad A = -E$$

- (ii) $a+d = 0$ のとき, $ad-bc+1=0$ を満たす, すなわち

$$a^2 = 1-bc, \quad d = -a$$

を満たせばよい. たとえば, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ などがある.

したがって, 本命題は偽である.

- (3) $f(x) = (x-a)^3$ とすると, $f'(a) = 0$ を満たすが, $f(a)$ は極値ではない.

したがって, 本命題は偽である.

- (4) $S = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

連続する2数 $n, n+1$ の一方は奇数である.

$n \geq 2$ から, S の約数の中に3以上の奇数がある.

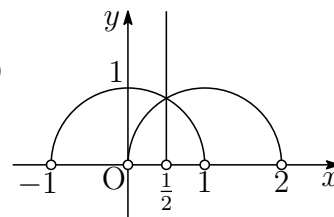
したがって, 本命題は真である. ■

2 (1) $AB = AC$ のとき $x^2 + y^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$

$AB = BC$ のとき $(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$

$AC = BC$ のとき $x^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2$

ゆえに $x = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{3}$



よって、点Cは $y > 0$ で $\textcircled{1}$ または $\textcircled{2}$ または $\textcircled{3}$ 上の点である。

(2) $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるとき

$$BC^2 + CA^2 > AB^2, \quad CA^2 + AB^2 > BC^2, \quad AB^2 + BC^2 > CA^2$$

第1式から

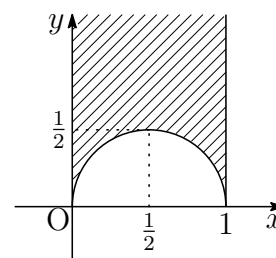
$$(x-1)^2 + y^2 + x^2 + y^2 > 1 \quad \text{すなわち} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4}$$

第2式から $x^2 + y^2 + 1 > (x-1)^2 + y^2$ すなわち $x > 0$

第3式から $1 + (x-1)^2 + y^2 > x^2 + y^2$ すなわち $x < 1$

よって

$$\begin{cases} y > 0 \\ 0 < x < 1 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4} \end{cases}$$



不等式の表す領域は、右の図の斜線部分で境界線を含まない。

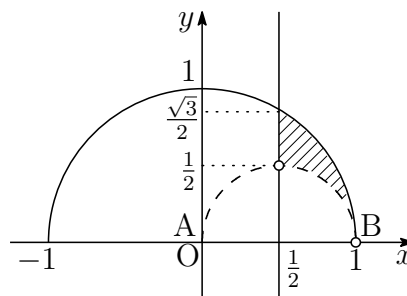
(3) $\triangle ABC$ が鋭角三角形で、 $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ を満たすとき

$$BC \leq CA \leq AB \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

上式を整理すると

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

これと (2) の結果の共通部分であるから、右の図の斜線部分で、実線部は含むが破線部の境界線は含まない。



(4) (3) の結果から、C が (3) の図の破線上にないから $\gamma = \angle BCA < \frac{\pi}{2}$

C が、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ の交点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ にあるとき $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$

よって $\frac{\pi}{3} \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$

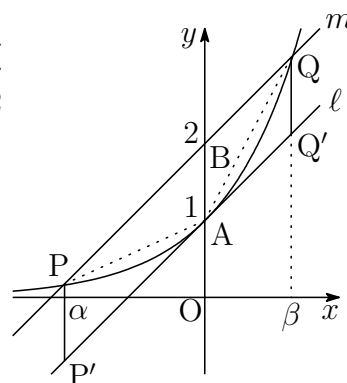
■

3 (1) $S = AB \cdot (\beta - \alpha) = \beta - \alpha$

(2) $y = e^x$ より $y' = e^x$

曲線 $y = e^x$ の点 $A(0, 1)$ における接線 ℓ の傾きは 1 であるから, m の方程式は $y = x + 2$

$$\begin{aligned} T &= \int_{\alpha}^{\beta} (x + 2 - e^x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - e^x \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + 2(\beta - \alpha) - (e^{\beta} - e^{\alpha}) \end{aligned}$$



P, Q は $y = e^x$ と $y = x + 2$ の交点であるから

$$e^{\alpha} = \alpha + 2, \quad e^{\beta} = \beta + 2 \quad \text{ゆえに} \quad e^{\beta} - e^{\alpha} = \beta - \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad T &= \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + 2(\beta - \alpha) - (\beta - \alpha) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

(3) (1), (2) の結果から $T = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)S$

$\triangle PAQ < T < S$ より

$$\frac{1}{2}S < \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)S < S \quad \text{ゆえに} \quad 1 < \alpha + \beta + 2 < 2$$

$$\text{したがって} \quad -1 < \alpha + \beta < 0 \quad \cdots (*)$$

$$P(\alpha, \alpha + 2), Q(\beta, \beta + 2) \text{ の中点 R は } \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha + \beta + 4}{2} \right)$$

$$(*) \text{ より } -\frac{1}{2} < \frac{\alpha + \beta}{2} < 0, \quad \frac{3}{2} < \frac{\alpha + \beta + 4}{2} < 2$$

よって, 点 R は第 2 象限にある.

別解 $P(\alpha, e^{\alpha}), Q(\beta, e^{\beta})$ の中点 R は $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{e^{\alpha} + e^{\beta}}{2} \right)$

$$\frac{e^{\alpha} + e^{\beta}}{2} > 0, \quad (*) \text{ より } \frac{\alpha + \beta}{2} < 0 \quad \text{よって, 点 R は第 2 象限にある.}$$

(4) (*) より $\alpha + \beta > -1$



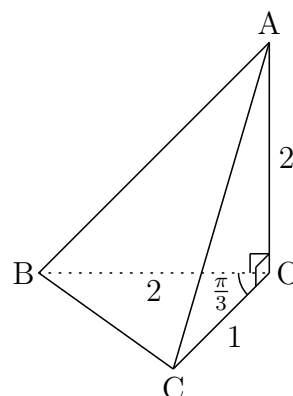
4 (1) $\angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{2}$, $\angle BOC = \frac{\pi}{3}$,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 1 \text{ より}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \frac{\pi}{3} = 1$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{c}| |\vec{a}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$



したがって

$$\vec{p} \cdot \vec{a} = \{(1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\} \cdot \vec{a} = 4(1-s-t),$$

$$\vec{p} \cdot \vec{b} = \{(1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\} \cdot \vec{b} = 4s + t,$$

$$\vec{p} \cdot \vec{c} = \{(1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\} \cdot \vec{c} = s + t,$$

(2) $\angle AOP = \angle BOP = \angle COP$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2|\vec{c}|$ であるから

$$\vec{p} \cdot \vec{a} = \vec{p} \cdot \vec{b} = 2\vec{p} \cdot \vec{c}$$

したがって, (1) の結果から

$$4(1-s-t) = 4s + t = 2(s+t) \quad \text{これを解いて} \quad s = \frac{2}{9}, \quad t = \frac{4}{9}$$

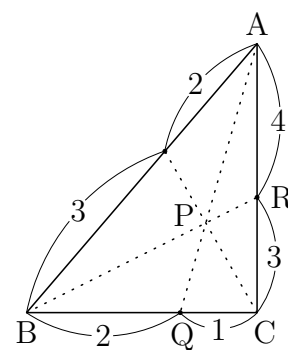
(3) (2) の結果より, $\vec{p} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}$ であるから

$$3(\vec{a} - \vec{p}) + 2(\vec{b} - \vec{p}) + 4(\vec{c} - \vec{p}) = \vec{0}$$

$$3\vec{PA} + 2\vec{PB} + 4\vec{PC} = \vec{0} \quad \dots (*)$$

$$\text{ゆえに} \quad \vec{AP} = 2 \cdot \frac{\vec{PB} + 2\vec{PC}}{3} = 2\vec{PQ} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{BP} = \frac{7}{2} \cdot \frac{4\vec{PC} + 3\vec{PA}}{7} = \frac{7}{2}\vec{PR} \quad \dots \textcircled{2}$$



$$\text{よって} \quad \mathbf{BQ : QC = 2 : 1, \quad AR : RC = 4 : 3}$$

(4) (3) の結果から $\triangle PAB : \triangle PCA = 2 : 1$, $\triangle PAB : \triangle PBC = 4 : 3$

$$\text{したがって} \quad \triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = 4 : 3 : 2$$

$$\text{よって, 四面体 OABP, OBCP, OCAP の体積比は} \quad \mathbf{4 : 3 : 2}$$

補足 (*) から $\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB = 3 : 2 : 4$



- 5** (1) A は 2 回対戦した時点で 1 勝 1 敗で、3 戦目と 4 戦目に勝つ確率であるから

$$P_4 = 2p(1-p) \times p^2 = 2p^3(1-p)$$

- (2) $2n-1$ 回対戦した時点で A の金貨の枚数は 1 枚か 3 枚であるから

$$P_{2n-1} = 0$$

- (3) $2n$ 回対戦した時点で A の金貨の枚数が 2 枚である確率を a_n とすると

$$a_1 = 2p(1-p), \quad a_{n+1} = 2p(1-p)a_n \quad \text{すなわち} \quad a_n = \{2p(1-p)\}^n$$

$$P_{2n} = p^2 a_{n-1} \text{ であるから} \quad P_{2n} = p^2 \{2p(1-p)\}^{n-1}$$

- (4) (3) の結果から

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n P_{2k} = p^2 \sum_{k=1}^n \{2p(1-p)\}^{k-1} \\ &= p^2 \cdot \frac{1 - \{2p(1-p)\}^n}{1 - 2p(1-p)} \end{aligned}$$

- (5) $2p(1-p) = -2\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ より $(0 < p < 1)$ $0 < 2p(1-p) \leq \frac{1}{2}$

$$(4) \text{ の結果から} \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{p^2}{1 - 2p(1-p)}$$

$$\text{したがって} \quad p - S = p - \frac{p^2}{1 - 2p(1-p)} = \frac{p(1-p)(1-2p)}{1 - 2p(1-p)}$$

$p(1-p) > 0$, $1 - 2p(1-p)$ であるから, $p - S$ と $1 - 2p$ の符号が一致する.

$$\text{よって} \quad 0 < p < \frac{1}{2} \text{ のとき} \quad p > S$$

$$p = \frac{1}{2} \text{ のとき} \quad p = S$$

$$\frac{1}{2} < p < 1 \text{ のとき} \quad p < S$$

