平成18年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・総合学科 (理科系)・生物生産

1 3×3 行列 A と E を

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1) A^2，A^3 を求めよ．

(2) $(xA-E)^3=xA-E$ を満たす実数 x のうち，正のものをすべて求めよ．

(3) (2) で求めた x のうち最小のものを x_0 とする．自然数 n に対して，$(x_0A-E)^n=p_nA+q_nE$ を満たす実数 p_n と q_n を求めよ．

2 $a_1=2$，$a_2=1$ と $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $b_n=a_{n+1}+a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列であることを示せ．

(2) $n\geqq 2$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_k$ を n の式で表せ．

(3) a_n を n の式で表せ．

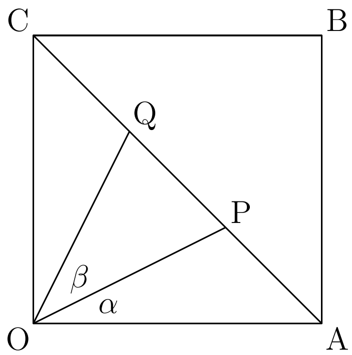
(4) 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ の収束，発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ．

3 正方形 OABC の対角線 AC を 3 等分し，図のように，A に近い点を P，C に近い点を Q とする．また，$\angle\mathrm{AOP} = \alpha$，$\angle\mathrm{POQ} = \beta$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ．

(2) $\alpha < \dfrac{\pi}{6} < \beta$ を示せ．

(3) 線分 PQ 上に点 R を $\angle\mathrm{POR} = \alpha$ となるようにとる．このとき，比 AR : RC を求めよ．



4 赤い袋に 1 から n までの整数を書いた玉が，それぞれ 1 個ずつ，合計 n 個入っている．同様に，白い袋に 1 から n までの整数を書いた玉が，それぞれ 1 個ずつ，合計 n 個入っている．ただし，$n > 4$ とする．赤い袋から玉を 2 個同時に取り出し，書いてある数を r_1，r_2 とする．次に，白い袋から玉を 2 個同時に取り出し，書いてある数を w_1，w_2 とする．座標平面上の 4 本の直線 $x = r_1$，$x = r_2$，$y = w_1$，$y = w_2$ で囲まれた四角形を A とするとき，次の問いに答えよ．

(1) A の面積が 4 である確率を求めよ．

(2) $|r_1 - r_2|$ の期待値を求めよ．

(3) $n = 7$ のとき，A の面積の期待値を求めよ．

5 関数 $f(x) = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減と極値を調べて，$y = f(x)$ のグラフをかけ．

(2) $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = mx$ の交点が，3 個になるような m の値の範囲を求めよ．

(3) $m < 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = mx$ で囲まれた二つの部分の面積の和を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $A^2 = 3A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$，$A^3 = A^2A = 3A^2 = 9A = \begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{9} & \mathbf{9} \\ \mathbf{9} & \mathbf{9} & \mathbf{9} \\ \mathbf{9} & \mathbf{9} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$

(2) (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}(xA-E)^3 &= x^3A^3 - 3x^2A^2 + 3xA - E \\ &= 9x^3A - 9x^2A + 3xA - E\end{aligned}$$

これを $(xA-E)^3 = xA - E$ に代入すると

$$9x^3A - 9x^2A + 3xA - E = xA - E$$

したがって　$x(3x-1)(3x-2)A = O$　$x > 0$ より　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}}$

(3) (2) の結果から，$x_0 = \dfrac{1}{3}$，$\left(\dfrac{1}{3}A - E\right)^n = p_nA + q_nE$，$p_1 = \dfrac{1}{3}$，$q_1 = -1$

$$\begin{aligned}p_{n+1}A + q_{n+1}E &= (p_nA + q_nE)\left(\frac{1}{3}A - E\right) \\ &= \frac{1}{3}q_nA - q_nE\end{aligned}$$

ゆえに　$p_{n+1} = \dfrac{1}{3}q_n$，$q_{n+1} = -q_n$

よって　$\boldsymbol{q_n = (-1)^n,\quad p_n = \dfrac{1}{3}(-1)^{n-1}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ より

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n) \quad \text{すなわち} \quad b_{n+1} = 2b_n$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列である．

(2) $b_1 = a_2 + a_1 = 1 + 2 = 3$ であるから，(1) の結果より　$b_n = 3{\cdot}2^{n-1}$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_k = 3\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^{k-1} = 3{\cdot}\frac{1-(-2)^{n-1}}{1-(-2)} = \mathbf{1-(-2)^{n-1}}$$

(3) $b_n = a_{n+1} + a_n$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_k &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}(a_{k+1}+a_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\{(-1)^{k+1}a_{k+1} - (-1)^k a_k\}\\ &= (-1)^n a_n + a_1 = (-1)^n a_n + 2\end{aligned}$$

上式と (2) の結果より　$(-1)^n a_n + 2 = 1 - (-2)^{n-1}$

$$(-1)^n a_n = -1 - (-2)^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n = (-1)^{n-1} + 2^{n-1}}$$

別解 $a_{n+2} - 2a_{n+1} = -(a_{n+1} - 2a_n)$

$$a_{n+1} - 2a_n = (a_2 - 2a_1){\cdot}(-1)^{n-1} = -3(-1)^{n-1}$$

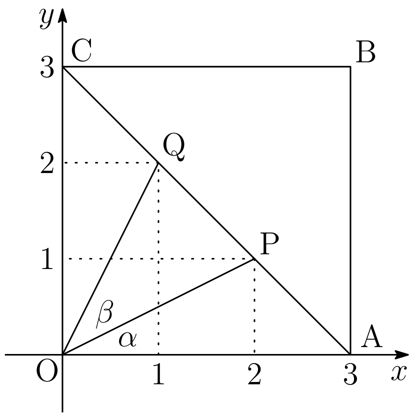
上式と $b_n = a_{n+1} + a_n = 3{\cdot}2^{n-1}$ から　$\boldsymbol{a_n = (-1)^{n-1} + 2^{n-1}}$

(4) (3) の結果から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}+2^{n-1}}{(-1)^n+2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1}{-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2} = \frac{1}{2}$$

よって，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ は収束し，極限値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ ■

3 (1) 正方形 OABC の一辺の長さを 3 とし，右の図のように座標平面上におくと



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2,\ 1),\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1,\ 2)$$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\frac{6}{3\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

(2) $\dfrac{4}{5}>\dfrac{3}{4}>\dfrac{16}{25}$ より　$\dfrac{2}{\sqrt{5}}>\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{4}{5}$　ゆえに　$\cos\alpha>\cos\dfrac{\pi}{6}>\cos\beta$

α，β は鋭角であるから　　$\alpha<\dfrac{\pi}{6}<\beta$

別解 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$ より　$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{3}<\sqrt{3}=\tan\dfrac{\pi}{3}$

$2\alpha<\dfrac{\pi}{3}$，$2\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ より　$\alpha<\dfrac{\pi}{6}<\beta$

(3) $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$ より，直線 OR の傾きは　$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{3}$

直線 OR : $y=\dfrac{4}{3}x$ と直線 AC : $y=-x+3$ の交点 R の x 座標は

$$\frac{4}{3}x=-x+3\quad \text{これを解いて}\quad x=\frac{9}{7}$$

よって　$\mathrm{AR}:\mathrm{RC}=\left(3-\dfrac{9}{7}\right):\dfrac{9}{7}=\boldsymbol{4:3}$ ■

$\boxed{4}$ (1)

$$p_1 = P(|r_1 - r_2| = 1) = P(|w_1 - w_2| = 1) = \frac{n-1}{{}_n\mathrm{C}_2}$$
$$p_2 = P(|r_1 - r_2| = 2) = P(|w_1 - w_2| = 2) = \frac{n-2}{{}_n\mathrm{C}_2}$$
$$p_4 = P(|r_1 - r_2| = 4) = P(|w_1 - w_2| = 4) = \frac{n-4}{{}_n\mathrm{C}_2}$$

とおくと，求める確率は

$$\begin{aligned} 2p_1p_4 + {p_2}^2 &= 2\cdot\frac{n-1}{{}_n\mathrm{C}_2}\cdot\frac{n-4}{{}_n\mathrm{C}_2} + \left(\frac{n-2}{{}_n\mathrm{C}_2}\right)^2 \\ &= \frac{4}{n^2(n-1)^2}\{2(n-1)(n-4) + (n-2)^2\} \\ &= \boldsymbol{\frac{4(3n^2 - 14n + 12)}{n^2(n-1)^2}} \end{aligned}$$

(2) $P(|r_1 - r_2| = k) = \dfrac{n-k}{{}_n\mathrm{C}_2}$ であるから $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$
求める期待値を $E(X)$ とおくと

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} kP(|r_1 - r_2| = k) = \sum_{k=1}^{n-1} k\cdot\frac{n-k}{{}_n\mathrm{C}_2} \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}(nk - k^2) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left\{n\cdot\frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)\right\} = \boldsymbol{\frac{n+1}{3}} \end{aligned}$$

(3) $|w_1 - w_2|$ の期待値を $E(Y)$ とすると，A の面積の期待値は

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{(n+1)^2}{9}$$

$n = 7$ であるから，求める期待値は $\boldsymbol{\dfrac{64}{9}}$ ■

5 (1) $f(x) = x + \dfrac{x}{x^2-1}$ より

$$f'(x) = 1 + \frac{1(x^2-1) - x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2-1)^2}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

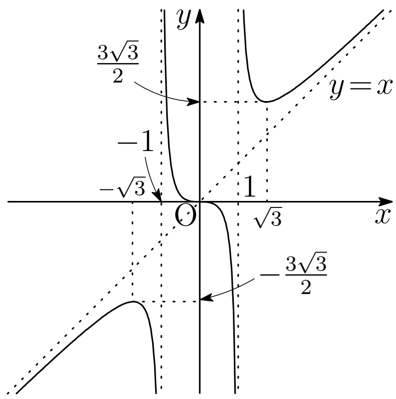
x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x) - x\} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1} = 0$$

したがって，漸近線は　$y = x$

$$\lim_{x\to-1\pm0} f(x) = \pm\infty \quad (\text{複号同順})$$

$$\lim_{x\to1\pm0} f(x) = \pm\infty \quad (\text{複号同順})$$



よって　極大値 $\boldsymbol{f(-\sqrt{3}) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

極小値 $\boldsymbol{f(\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

(2) $y = f(x)$ と $y = mx$ から y を消去すると

$$x + \frac{x}{x^2-1} = mx \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x\{(1-m)x^2+m\}}{x^2-1} = 0 \qquad (*)$$

$(*)$ が異なる 3 つの解をもつとき，明らかに $m \neq 1$ であるから

$$x = 0,\ \pm\sqrt{\frac{m}{m-1}}$$

このとき，$x \neq \pm1$ であることに注意して，求める条件は

$$\frac{m}{m-1} > 0 \quad \text{ゆえに} \quad m(m-1) > 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{m < 0,\ 1 < m}$$

(3) $m<0$ のとき，$y=f(x)$ と $y=mx$ で囲まれた二つの部分は原点に関して対称であるから，それらの面積の和を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= 2\int_0^{\sqrt{\frac{m}{m-1}}} \{f(x)-mx\}\,dx \\
&= \int_0^{\sqrt{\frac{m}{m-1}}} \left\{2(1-m)x+\frac{2x}{x^2-1}\right\} dx \\
&= \Big[\ (1-m)x^2+\log|x^2-1|\ \Big]_0^{\sqrt{\frac{m}{m-1}}} \\
&= (1-m)\cdot\frac{m}{m-1}+\log\left|\frac{1}{m-1}\right| \\
&= \boldsymbol{-m-\log(1-m)}
\end{aligned}
$$

■