平成17年度　広島大学　2次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5

1 行列 I と J が

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列

$$J^2, \quad J^3, \quad J^4$$

は，それぞれ，I または J の定数倍になることを示せ．

(2) 実数 a と b について，行列

$$aI + bJ$$

が逆行列をもつための必要十分条件を求めよ．

(3) 任意の実数 s，t に対して，行列

$$sI + (1 + st)J + tJ^2 + st^2J^3 + t^2J^4$$

は逆行列をもつことを示せ．

2 正の実数 a，b，c を係数とする3次方程式

$$(*) \quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

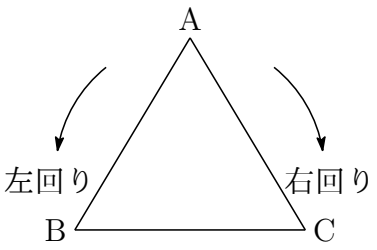
が，純虚数の解をもつとする．次の問いに答えよ．

(1) $ab - c$ の値を求めよ．

(2) 複素数平面上で方程式 $x^3 + 8 = 0$ の3個の解が表す点を頂点とする三角形を考える．方程式 $(*)$ の解が表すすべての点がこの三角形の頂点または辺上にあるとき，a, b, c の値を求めよ．

3 2 枚のコインを同時に投げて，三角形 ABC の 1 つの頂点にある駒を，

2 枚とも表が出たとき，左回りで隣の頂点に移動し，2 枚とも裏が出たとき，右回りで隣の頂点に移動し，表と裏が出たとき，動かさない



という試行を考える．初めに駒を頂点 A に置く．この試行を n 回繰り返したとき，1 回目の試行後の駒の位置を X_1，2 回目の試行後の駒の位置を X_2，$\cdots$，n 回目の試行後の駒の位置を X_n とする．次の問いに答えよ．

(1) この試行を 2 回繰り返したとき，X_2 が A である確率 P_2 を求めよ．

(2) この試行を 4 回繰り返したとき，最後の X_4 のみが A である確率 Q_4 を求めよ．

(3) この試行を n 回 $(n \geqq 2)$ 繰り返したとき，最後の X_n のみが A である確率 Q_n を求めよ．

(4) この試行を n 回 $(n \geqq 2)$ 繰り返したとき，X_n が A である確率 P_n を求めよ．

4 実数全体で定義された関数

$$f(x) = \frac{4x + a}{x^2 + 1}$$

は，$x = \dfrac{1}{2}$ で極値をもつ．ただし，a は定数である．次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x) = 4x^3 - 3x + \dfrac{1}{2}$ の増減を調べて極値を求めよ．

(2) 公式

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

を用いて，$k = \cos\dfrac{2\pi}{9}$ は方程式 $f(x) = 0$ の解であることを示せ．

(3) $k > \dfrac{3}{4}$ であることを示せ．

(4) 方程式 $\cos x = x$ の解を α とするとき，

$$\frac{2\pi}{9} < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

を示せ．ここで，$3.14 < \pi < 3.15$ を利用してもよい．

解答例

1 (1) 行列 J にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$J^2 + I = O \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{J^2 = -I},\ \boldsymbol{J^3 = -J},\ \boldsymbol{J^4 = I}$$

したがって，題意を満たす．

(2) $aI + bJ = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ が逆行列をもつための必要十分条件は

$$a^2 + b^2 \neq 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a \neq 0} \ \text{または} \ \boldsymbol{b \neq 0}$$

(3) (1) の結果から

$$(*) \quad sI + (1+st)J + tJ^2 + st^2J^3 + t^2J^4 = (s - t + t^2)I + (1 + st - st^2)J$$

この行列が逆行列をもたないと仮定すると，(2) の結論から

$$s - t + t^2 = 0, \quad 1 + st - st^2 = 0$$

このとき，上の 2 式から s を消去すると

$$1 + t^2(t-1)^2 = 0$$

これは，t が実数であることに反する．
よって，行列 $(*)$ は，逆行列をもつ． ■

2 (1) 方程式 $(*)$ の純虚数の解を pi とおくと ($p \neq 0$ の実数)

$$(pi)^3 + a(pi)^2 + bpi + c = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (-ap^2 + c) + p(-p^2 + b)i = 0$$

したがって $\quad -ap^2 + c = 0,\ -p^2 + b = 0$
上の 2 式から p^2 を消去すると $\quad \boldsymbol{ab - c = 0}$

(2) (1) の結果から，方程式 $(*)$ は ($a > 0,\ b > 0$)

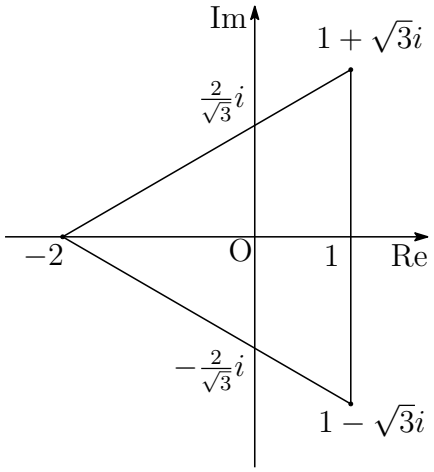
$$x^3 + ax^2 + bx + ab = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x + a)(x^2 + b) = 0$$

これを解いて $\quad x = -a,\ \pm\sqrt{b}i$

方程式 $x^+3 = 0$，すなわち，$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$ の解は

$$x = -2,\ 1 \pm \sqrt{3}i$$

これら 3 点を頂点とする三角形は，下の図のようになる．



方程式 $(*)$ の実数解は負であること，三角形の虚軸との交点により

$$-a = -2,\ \ \sqrt{b} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a = 2},\ \ \boldsymbol{b = \frac{4}{3}}$$

これを (1) の結果に代入することにより $\quad \boldsymbol{c = \frac{8}{3}}$ ■

3 (1) 駒の移動とそのときの確率は

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \mathrm{A} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \mathrm{A}, \quad \mathrm{A} \xrightarrow{\frac{1}{4}} \mathrm{B} \xrightarrow{\frac{1}{4}} \mathrm{A}, \quad \mathrm{A} \xrightarrow{\frac{1}{4}} \mathrm{C} \xrightarrow{\frac{1}{4}} \mathrm{A}$$

よって，求める確率 P_2 は

$$P_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

(2) B または C の位置あることを $\overline{\mathrm{A}}$ とすると，駒の移動とその確率は

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \overline{\mathrm{A}} \xrightarrow{\frac{3}{4}} \overline{\mathrm{A}} \xrightarrow{\frac{3}{4}} \overline{\mathrm{A}} \xrightarrow{\frac{1}{4}} \mathrm{A}$$

よって，求める確率 Q_4 は

$$Q_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{9}{128}}$$

(3) (2) と同様に，駒の移動とその確率は

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \overline{\mathrm{A}} \overbrace{\xrightarrow{\frac{3}{4}} \cdots \xrightarrow{\frac{3}{4}}}^{n-2\text{ 個}} \overline{\mathrm{A}} \xrightarrow{\frac{1}{4}} \mathrm{A}$$

よって，求める確率 Q_n は

$$Q_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}}$$

(4) $\{P_n\}$ について，次の確率漸化式が成立する．

$$P_0 = 1, \quad P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{4}(1 - P_n)$$

したがって $\quad P_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}\left(P_n - \dfrac{1}{3}\right)$

$$P_n - \frac{1}{3} = \left(P_0 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{P_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

■

4 (1) $f(x)=\dfrac{4x+a}{x^2+1}$ より　$f'(x)=\dfrac{-4x^2-2ax+4}{(x^2+1)^2}$

$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{2}$ で極値をとるから，$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ より

$$-4\left(\frac{1}{2}\right)^2-2a\cdot\frac{1}{2}+4=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a=3}$$

(2) (1) の結果から

$$f'(x)=\frac{-4x^2-6x+4}{(x^2+1)^2}=-\frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 -1	↗	極大 4	↘

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$$

よって　最大値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{4}$，最小値 $f(-2)=\mathbf{-1}$

(3) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{4x}{x^2+1}\,dx+3\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,dx$

$$\int_0^1\frac{4x}{x^2+1}\,dx=2\Big[\ \log(x^2+1)\ \Big]_0^1=2\log 2$$

$x=\tan\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0\to 1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

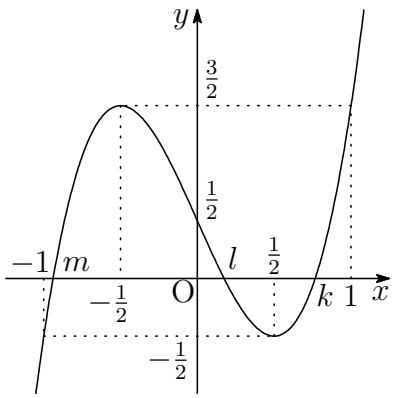
よって　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\mathbf{2\log 2+\frac{3\pi}{4}}$ ■

5 (1) $f(x)=4x^3-3x+\dfrac{1}{2}$ より

$$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって　　極大値 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$　　極小値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-\dfrac{1}{2}}$



(2) $x=\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると $f(x)$ は

$$f(x)=4\cos^3\theta-3\cos\theta+\frac{1}{2}=\cos 3\theta+\frac{1}{2}$$

このとき，$f(x)=0$ とすると，$0\leqq 3\theta\leqq 3\pi$ より

$$\cos 3\theta=-\frac{1}{2}\quad\text{ゆえに}\quad 3\theta=\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3}$$

したがって　　$\theta=\dfrac{2\pi}{9},\ \dfrac{4\pi}{9},\ \dfrac{8\pi}{9}$

これから，$f(x)=0$ の解は　$x=\cos\dfrac{2\pi}{9},\ \cos\dfrac{4\pi}{9},\ \cos\dfrac{8\pi}{9}$　$\cdots(*)$

よって，$k=\cos\dfrac{2\pi}{9}$ は方程式 $f(x)=0$ の解である．

補足　上のグラフにおいて，$l=\cos\dfrac{4\pi}{9}$，$m=\cos\dfrac{8\pi}{9}$

(3) $(*)$ から，k は $f(x)=0$ の最大の解である．

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=4\left(\frac{3}{4}\right)^3-3\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{16},\quad f(k)=0$$

区間 $\dfrac{1}{2}<x$ において，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f\left(\frac{3}{4}\right)<f(k)\quad\text{ゆえに}\quad\frac{3}{4}<k$$

(4) (2)，(3) の結果から　　$\cos\dfrac{2\pi}{9}>\dfrac{3}{4}\quad\cdots①$

$-1\leqq\cos x\leqq 1$ であるから，$\cos x=x$ の解は，$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ にある．

$g(x)=x-\cos x$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$g'(x)=1-\sin x>0$$

① を利用すると

$$g\left(\frac{2\pi}{9}\right)=\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}<\frac{2\pi}{9}-\frac{3}{4}=\frac{2}{9}\left(\pi-\frac{27}{8}\right)<\frac{2}{9}(\pi-3.375)<0,$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{4}(\pi-\sqrt{8})>0$$

$g(x)=0$ の解 α について，$g(x)$ は単調増加であるから

$$g\left(\frac{2\pi}{9}\right)<g(\alpha)<g\left(\frac{\pi}{4}\right)\quad\text{よって}\quad\frac{2\pi}{9}<\alpha<\frac{\pi}{4}$$

■