平成15年度　広島大学　2次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5

1 θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，複素数平面において $0 \leqq \arg z \leqq \pi-\theta$ を満たすすべての点 $z(\neq 0)$ と点 0 からなる集合を D とする．

(1) 複素数平面上に D を図示せよ．

(2) a を $a>0$ を満たす実数とする．このとき，D に属する点 z に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$|z|\sin\theta \leqq |z+a|$$

また，等号が成り立つときの z を a，θ を用いて表せ．

2 $S_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) すべての $n=1,2,3,\cdots$ について，$\dfrac{1}{\pi(n+1)^2} \leqq S_n \leqq \dfrac{1}{\pi n^2}$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$ の値を求めよ．

3 a を $2<a<3$ を満たす定数とし，

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-1+\frac{a-e^x}{a-2}-\left|e^x-1-\frac{a-e^x}{a-2}\right|\right)$$

とおく．ただし，e は自然対数の底である．

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2) $y=f(x)$ のグラフの $y \geqq 0$ の部分と x 軸とで囲まれる図形を直線 $x=\log 2$ のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ．

4 F 君は G 君の投げるボールを確率 $p(0<p<1)$ でヒットする．自然数 n に対して，1 から n までの数字を 1 つずつ記入した n 枚のカードが入った箱 B_n がある．G 君が箱 B_n から勝手にカードを 1 枚引いて，カードに書かれている数字の回数だけ F 君にボールを投げる試行を考える．

(1) 箱 B_k を用いた試行で F 君が k 本ヒットを打つ確率を q_k，また箱 B_{k+1} を用いた試行で F 君が k 本ヒットを打つ確率を r_k とするとき，$(k+1)r_k-kq_k$ を p，k を用いて表せ．

(2) 箱 B_k を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を $q_j(0 \leqq j \leqq k)$，箱 B_{k+1} を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を $r_j(0 \leqq j \leqq k+1)$ とするとき，$(k+1)r_j-kq_j(0 \leqq j \leqq k)$ を p，k，j を用いて表せ．

(3) 箱 B_n を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を $p_j(0 \leqq j \leqq n)$ とし，$\alpha=pt+1-p$ とすると，変数 t に関して次の等式が成り立つことを示せ．

$$p_0+p_1t+p_2t^2+\cdots+p_nt^n=\frac{1}{n}(\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)$$

(4) 箱 B_n を用いた試行において，F 君が打つヒットの数の期待値 E を n，p を用いて表せ．

5 $a,\ b$ を $a^2-4b<0$ を満たす実数とする．

(1) 実数を成分とする 2 次の正方行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が等式

$$(*)\quad X^2-aX+bE=O$$

を満たすならば，

$$x+w=a,\quad xw-yz=b$$

が成り立つことを示せ．ただし，O は 2 次の零行列であり，E は 2 次の単位行列である．

(2) 等式 $(*)$ を満たす実数を成分とする 2 次の正方行列全体の集合を S とする．S に属する行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$(**)\quad x^2+y^2+z^2+w^2\geqq 2b$$

また，等号が成り立つときの X を $a,\ c$ を用いて表せ．ただし，$c=\sqrt{b-\dfrac{a^2}{4}}$ とする．

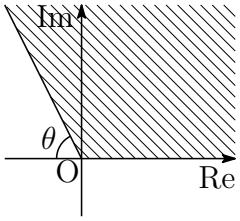
(3) $A,\ B$ を不等式 $(**)$ において等号が成り立つ S に属する 2 つの相異なる行列とする．このとき

$$(X-A)(X-B)=O$$

を満たす S に属する行列 X は A または B であることを示せ．

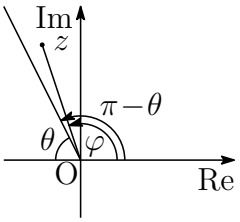
解答例

1 (1) 条件から，D の表す領域は，下の図の斜線部分である．



(2) $\varphi = \arg z$ とすると，条件から

$$\varphi \leqq \pi - \theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos\varphi \geqq \cos(\pi - \theta)$$



上式において，等号が成立するとき

$$\varphi = \pi - \theta$$

したがって

$$\begin{aligned} |z+a|^2 - |z|^2\sin^2\theta &= |z|^2\cos^2\theta + a(z+\overline{z}) + a^2 \\ &= |z|^2\cos^2\theta + 2a|z|\cos\varphi + a^2 \\ &\geqq |z|^2\cos^2\theta + 2a|z|\cos(\pi-\theta) + a^2 \\ &= |z|^2\cos^2\theta - 2a|z|\cos\theta + a^2 \\ &= (|z|\cos\theta - a)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

よって　　$|z|\sin\theta \leqq |z+a| \quad \cdots(*)$

また，$(*)$ において等号が成立するとき

$$\varphi = \pi - \theta, \quad |z|\cos\theta - a = 0$$

このとき，$|z| = \dfrac{a}{\cos\theta}$，$\varphi = \pi - \theta$ であるから

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= \frac{a}{\cos\theta}(-\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \boldsymbol{a(-1 + i\tan\theta)} \end{aligned}$$

■

2 (1) $n\pi \leqq x \leqq (n+1)\pi$ において

$$\frac{1-\cos x}{(n+1)^2\pi^2} \leqq \frac{1-\cos x}{x^2} \leqq \frac{1-\cos x}{n^2\pi^2}$$

したがって

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1-\cos x}{(n+1)^2\pi^2}\,dx \leqq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \leqq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1-\cos x}{n^2\pi^2}\,dx$$

このとき $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (1-\cos x)\,dx = \Big[\, x-\sin x \,\Big]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \pi$

よって，$\displaystyle S_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ について

$$\frac{1}{\pi(n+1)^2} \leqq S_n \leqq \frac{1}{\pi n^2}$$

(2) (1) の結果から $\displaystyle \pi k^2 \leqq \frac{1}{S_k} \leqq \pi(k+1)^2$

$$\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqq \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S_k} \leqq \frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2$$

このとき

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{3}, \\
\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k+1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n^3}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \pi\left\{\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right\} = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

よって，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S_k} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

■

3 (1) $$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-1+\frac{a-e^x}{a-2}-\left|e^x-1-\frac{a-e^x}{a-2}\right|\right)$$

$e^x-1-\dfrac{a-e^x}{a-2}=\dfrac{(a-1)(e^x-2)}{a-2}$ より $(2<a<3)$

$x\leqq\log 2$ のとき　$e^x-1-\dfrac{a-e^x}{a-2}\leqq 0$

$\log 2\leqq x$ のとき　$e^x-1-\dfrac{a-e^x}{a-2}\geqq 0$

(i) $x\leqq\log 2$ のとき

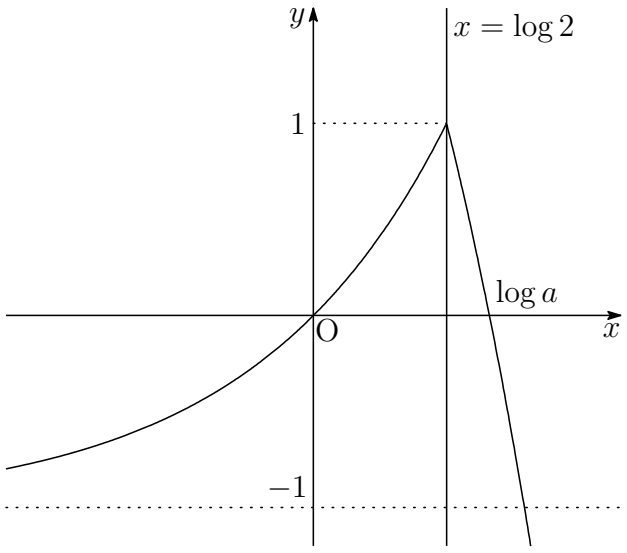
$$f(x)=\frac{1}{2}\left\{e^x-1+\frac{a-e^x}{a-2}+\left(e^x-1-\frac{a-e^x}{a-2}\right)\right\}=e^x-1$$

(ii) $\log 2\leqq x$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{2}\left\{e^x-1+\frac{a-e^x}{a-2}-\left(e^x-1-\frac{a-e^x}{a-2}\right)\right\}=\frac{a-e^x}{a-2}$$

(i)，(ii) より　$$f(x)=\begin{cases} e^x-1 & (x\leqq\log 2)\\ \dfrac{a-e^x}{a-2} & (\log 2\leqq x)\end{cases}$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる．



(2) (i) $x \leqq \log 2$ のとき，曲線 $y = f(x)$ の方程式を $x = \varphi(y)$ とすると

$$y = e^x - 1 \quad \text{ゆえに} \quad \varphi(y) = \log(y+1)$$

(ii) $\log 2 \leqq x$ のとき，曲線 $y = f(x)$ の方程式を $x = \psi(y)$ とすると

$$y = \frac{a - e^x}{a-2} \quad \text{ゆえに} \quad \psi(y) = \log\{a - (a-2)y\}$$

ここで

$$\log g(y) = \log(y+1) + \log\{a - (a-2)y\}$$

とおくと $(0 \leqq y \leqq 1)$

$$\begin{aligned} g(y) &= (y+1)\{a - (a-2)y\} \\ &= -(a-2)y^2 + 2y + a \\ &= -(a-2)\left(y - \frac{1}{a-2}\right)^2 + \frac{1}{a-2} + a \end{aligned}$$

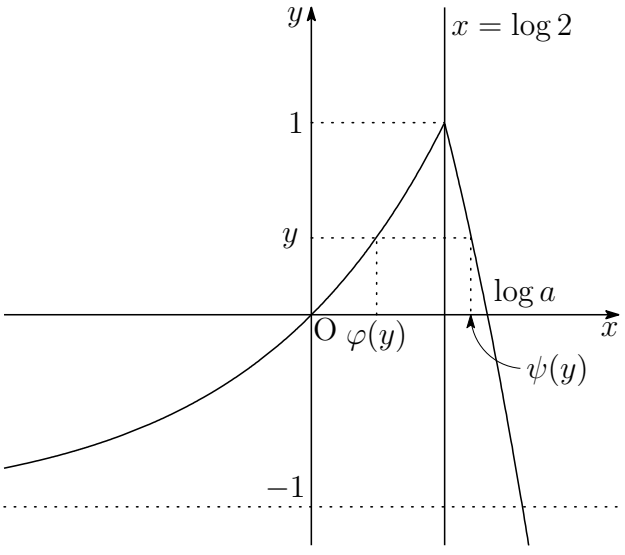
$2 < a < 3$ より，$1 < \dfrac{1}{a-2}$ であるから，$g(y)$ は $1 \leqq y \leqq 2$ で単調増加

$$g(y) \leqq g(1) \quad \text{ゆえに} \quad \log g(y) \leqq 2\log 2$$

したがって $\log(y+1) + \log\{a - (a-2)y\} \leqq 2\log 2$

$$\begin{aligned} \log\{a - (a-2)y\} - \log 2 &\leqq \log 2 - \log(y+1) \\ \psi(y) - \log 2 &\leqq \log 2 - \varphi(y) \end{aligned}$$

$\log 2 - \varphi(y) \geqq \psi(y) - \log 2$ であるから，求める回転体の体積は，曲線 $x = \varphi(y)$ $(0 \leqq y \leqq 1)$ を $x = \log 2$ のまわりに 1 回転させたものである．



求める回転体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^1 \{2 - \varphi(y)\}^2 \, dy$$

$x = \varphi(y)$ とすると，$y = e^x - 1$　$\dfrac{dy}{dx} = e^x$

y	$0 \longrightarrow 1$
x	$0 \longrightarrow \log 2$

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^{\log 2} e^x (x - \log 2)^2 \, dx \\ &= \left[\, e^x \{(x - \log 2)^2 - 2(x - \log 2) + 2\} \, \right]_0^{\log 2} \\ &= -(\log 2)^2 - 2\log 2 + 2\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \pi\{-(\log 2)^2 - 2\log 2 + 2\}}$

補足 対数型から指数型の積分に置換すると，次の積分公式が利用できる [1].

$$\int e^{px+q} f(x) \, dx = \frac{e^{px+q}}{p} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots \right\} + C$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf (p.7)

4 (1) q_k は B_k から k のカードを引き，k 本ともヒットを打つ確率であるから

$$q_k = \frac{1}{k}\cdot p^k \quad \text{ゆえに} \quad kq_k = p^k$$

r_k は B_{k+1} から k のカードを引き k 本ともヒットを打つか，$k+1$ のカードを引き k 本がヒットで 1 本がヒットでない確率であるから

$$r_k = \frac{1}{k+1}p^k + \frac{1}{k+1}\cdot {}_{k+1}\mathrm{C}_k p^k(1-p)$$
$$(k+1)r_k = p^k + (k+1)p^k(1-p)$$

よって　　$\boldsymbol{(k+1)r_k - kq_k = (k+1)p^k(1-p)}$

(2) (1) と同様に

$$q_j = \begin{cases} \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{l=j}^{k} {}_l\mathrm{C}_j p^j(1-p)^{l-j} & (j \neq 0) \\ \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{l=1}^{k}(1-p)^l & (j=0) \end{cases}$$

$$r_j = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{l=j}^{k+1} {}_l\mathrm{C}_j p^j(1-p)^{l-j} & (j \neq 0) \\ \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{l=1}^{k+1}(1-p)^l & (j=0) \end{cases}$$

よって　　$\boldsymbol{(k+1)r_j - kq_j = {}_{k+1}\mathrm{C}_j p^j(1-p)^{k+1-j}}$

(3) $$p_j = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{l=j}^{n} {}_l\mathrm{C}_j p^j (1-p)^{l-j} & (j \neq 0) \\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{l=1}^{n} (1-p)^l & (j = 0) \end{cases}$$

ここで，0 以上の整数 $m,\ n$ について

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{cases} {}_m\mathrm{C}_n & (m \geqq n) \\ 0 & (m < n) \end{cases}$$

と定義すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n) &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \alpha^l = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} (pt + 1 - p)^l \\ &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{l} {}_l\mathrm{C}_j (pt)^j (1-p)^{l-j} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} p^j (1-p)^{l-j} t^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left\{ \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} p^j (1-p)^{l-j} \right\} t^j = \sum_{j=0}^{n} p_j t^j \\ &= p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n \end{aligned}$$

(4) $\alpha = pt + 1 - p$ より $\quad \dfrac{d}{dt}\alpha^k = k\alpha^{k-1} p$

(3) の結果を t について微分すると

$$p_1 + 2p_2 t + \cdots + np_n t^{n-1} = \frac{1}{n}(p + 2\alpha p + \cdots + n\alpha^{n-1} p)$$

$t = 1$ を上式に代入すると，$\alpha = 1$ に注意して

$$E = p_1 + 2p_2 + \cdots + np_n = \frac{1}{n}(1 + 2 + \cdots + n)p = \boldsymbol{\frac{(n+1)p}{2}}$$

■

5 (1) 実数を成分とする2次の正方行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ をハミルトン・ケーリーの定理に適用すると

$$X^2 - (x+w)X + (xw-yz)E = O$$

また，X が等式

$$(*) \quad X^2 - aX + bE = O$$

を満たすから，上の2式から

$$(x+w-a)X = (xw-yz-b)E \quad \cdots ①$$

$x+w-a \neq 0$ と仮定すると，実数 k を用いて，$X = kE$ とおける．
これを $(*)$ に代入すると

$$(k^2 - ak + b)E = O$$

2次方程式 $k^2 - ak + b = 0$ が実数解をもつから，係数について

$$a^2 - 4b \geqq 0$$

これは，$a^2 - 4b < 0$ に反するから

$$x + w - a = 0$$

これを ① に代入すると

$$(xw - yz - b)E = O \quad \text{ゆえに} \quad xw - yz - b = 0$$

よって　　$x + w = a$，$xw - yz = b$

(2) $b = xw - yz$ であるから

$$\begin{aligned}(x-w)^2 + (y+z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2(xw - yz) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2b \geqq 0\end{aligned}$$

よって　　$(**)$　$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \geqq 2b$

$(**)$ について，等号が成立するとき　$x - w = 0, \quad y + z = 0$

これと (1) の結論から

$$x = w = \frac{a}{2},\ y = \pm c,\ z = \mp c \quad \text{(複号同順)}$$

よって　　$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & \pm c \\ \mp c & \frac{a}{2} \end{pmatrix}}$　**(複号同順)**

(3) (2) の結果から，等号が成立する異なる 2 つの行列 $A,\ B$ について，一般性を失うことなく

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & 2c \\ -2c & a \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & -2c \\ 2c & a \end{pmatrix}$$

このとき，$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\det(X - A) - \det(X - B) &= -(y - c)(z + c) + (y + c)(z - c) \\ &= -2c(y - z)\end{aligned}$$

$c \neq 0$ であるから，$-2c(y - z) \neq 0$ より

$$\det(X - A) - \det(X - B) \neq 0$$

ゆえに　　$\det(X - A) \neq \det(X - B)$

したがって，少なくとも $\det(X - A)$ と $\det(X - B)$ の一方が正則であるから

$$X - A = O \quad \text{または} \quad X - B = O$$

よって，行列 X は A または B である．　■