

平成 14 年度 広島大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 150 分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5 6

- 1 2 次 の 正 方 行 列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ は 次の 3 つ の 条件 (i). (ii). (iii) を 満 た す と す る. た だ し, $a \neq 0$, $c \neq 0$, $b > d$ で, O は 次の 2 次 の 零 行 列 で あ る.

$$(i) A^2 = A, \quad (ii) B^2 = B, \quad (iii) AB = O$$

- (1) a, b, c, d の 値 を 求 め よ.
 - (2) 実数 p, q が どちら も 0 で な い と き, $(pA + qB)(xA + yB) = 2E$ と な る 実数 x, y を p, q を 用 い て 表 せ. た だ し, E は 2 次 の 単 位 行 列 で あ る.
- 2 条 件 $a_1 = -30$, $9a_{n+1} = a_n + \frac{4}{3^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で 定 義 さ れ る 数 列 $\{a_n\}$ が あ る.
- (1) $b_n = 3^n a_n$ と お く と き, 数 列 $\{b_n\}$ の 漸 化 式 を 求 め よ.
 - (2) 一 般 項 a_n を 求 め よ.
 - (3) a_n を 最 大 に す る n の 値 を 求 め よ.
- 3 C_1 を 曲 線 $y = e^x$, C_2 を 曲 線 $y = x \log x$ ($x > 0$) と す る. た だ し, $\log$ は 自 然 対 数 を 表 す. ま た, $x = e$ で 定 義 さ れ る 直 線 を l_1 , l_1 と C_2 と の 交 点 P を 通 り x 軸 に 平 行 な 直 線 を l_2 , l_2 と C_1 と の 交 点 Q を 通 り y 軸 に 平 行 な 直 線 を l_3 と す る.
- (1) 2 点 P, Q の 座 標 を 求 め よ.
 - (2) $x \geq 1$ の と き, $e^x > x \log x$ で あ る こ と を 示 せ.
 - (3) 2 直 線 l_1, l_3 と 2 曲 線 C_1, C_2 に よ っ て 囲 ま れ た 図 形 の 面 積 を 求 め よ.

- 4 xy 平面上を移動する点 P を考える. はじめに, 点 P は原点にあるとする. 4 枚のカードに上, 下, 左, 右の 4 つの文字を 1 つずつ書いて, それらを袋に入れておく.

1 枚のカードを取り出し,
カードに書かれた文字の方向に 1 だけ点 P を移動させて,
取り出したカードを袋に戻す.

という試行を繰り返す. 上, 下, 左, 右と書かれたカードは, それぞれ同じ確からしさで取り出されるものとする.

- (1) 上, 上, 下, 左, 右, 右, 右の 7 文字すべてを 1 列に並べてできる文字列は何通りあるか.
- (2) この試行を 7 回くり返したときに, 点 P が座標 $(2, 1)$ にある確率を求めよ.
- (3) この試行を 5 回くり返したときに, 点 P が x 軸上にある確率を求めよ.
- (4) この試行を 2 回くり返したときの点 P の座標を (X, Y) とする. $|X - Y|$ の期待値を求めよ.

- 5 C を曲線 $a^2x^2 + y^2 = 1$, l を直線 $y = ax + 2a$ とする. ただし, a は正の定数である.

- (1) C と l とが異なる 2 点で交わるための a の範囲を求めよ.
- (2) C 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求めよ.
- (3) (1) における交点を P, Q とし, 点 P における C の接線と点 Q における C の接線との交点を $R(X, Y)$ とする. a が (1) の範囲を動くとき, X, Y の関係式と Y の範囲を求めよ.

- 6 l を複素数平面上の直線 $z = t(1 + i)$ (t は実数), α, β を複素数とする. ただし, 点 α は l 上にないとする.

- (1) $\alpha = i\beta$ または $\alpha = \bar{\beta}$ ならば, l 上のすべての点 z に対して $\left| \frac{\bar{z} - \beta}{z - \alpha} \right| = 1$ であることを示せ.
- (2) l 上のすべての点 z に対して $\left| \frac{\bar{z} - \beta}{z - \alpha} \right| = 1$ ならば, $\alpha = i\beta$ または $\alpha = \bar{\beta}$ であることを示せ.
- (3) l 上の異なる 2 定点 z_1, z_2 があって $\frac{\bar{z}_1 - \beta}{z_1 - \alpha}$ と $\frac{\bar{z}_2 - \beta}{z_2 - \alpha}$ は同じ複素数になるとする. この複素数を γ とおくと, l 上のすべての点 z に対し $\frac{\bar{z} - \beta}{z - \alpha} = \gamma$ となることを示せ. また γ の値を求めよ.

解答例

- 1** (1) $\det A \neq 0$ と仮定すると, (iii) より, $B = O$ ゆえに $c = 0$
 これは, $c \neq 0$ に反する. したがって $\det A = 0$
 同様に, $\det B \neq 0$ と仮定すると, (iii) より, $A = O$ ゆえに $a = 0$
 これは, $a \neq 0$ に反する. したがって $\det B = 0$
 A, B をハミルトン・ケーリーの定理に適用すると

$$A^2 - 2aA = O, \quad B^2 - 2cB = O$$

条件 (i), (ii) をこれらに代入すると

$$(1 - 2a)A = O, \quad (1 - 2c)B = O$$

$a \neq 0, c \neq 0$ より, A, B は零行列 O ではないから

$$1 - 2a = 0, \quad 1 - 2c = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = c = \frac{1}{2}$$

$\det A = 0, \det B = 0, b > d$ より

$$\det A = \frac{1}{4} - b^2 = 0, \quad \det B = \frac{1}{4} - d^2 = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad b = \frac{1}{2}, \quad d = -\frac{1}{2}$$

- (2) (1) の結果から $BA = O$ これと (i)~(iii) より

$$\begin{aligned} (pA + qB)(xA + yB) &= pxA + qyB \\ &= \frac{px}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{qy}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} px + qy & px - qy \\ px - qy & px + qy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

与えられた条件 $(pA + qB)(xA + yB) = 2E$ より, 成分を比較して

$$px + qy = 4, \quad px - qy = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad px = 2, \quad qy = 2 \quad \text{よって} \quad x = \frac{2}{p}, \quad y = \frac{2}{q}$$



- 2** (1) $a_1 = -30$, $9a_{n+1} = a_n + \frac{4}{3^n}$ について, $b_n = 3^n a_n$ とおくと

$$b_1 = 3a_1 = -90, \quad 3b_{n+1} = b_n + 4 \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{4}{3}$$

- (2) (1) の結果から $b_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}(b_n - 2)$

$$\text{したがって} \quad b_n - 2 = (b_1 - 2) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\frac{92}{3^{n-1}}$$

$$b_n = 2 - \frac{92}{3^{n-1}} \quad \text{より} \quad a_n = \frac{b_n}{3^n} = \frac{2}{3^n} - \frac{276}{9^n}$$

- (3) (2) の結果から

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3^{n+1}} - \frac{276}{9^{n+1}} - \left(\frac{2}{3^n} - \frac{276}{9^n} \right) = \frac{12(184 - 3^n)}{9^{n+1}}$$

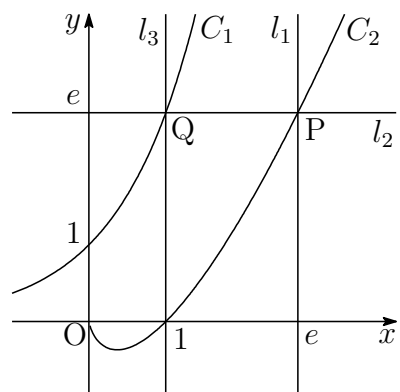
$$\text{したがって} \quad a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 > a_6 > a_7 > \cdots$$

よって, a_n が最大となるとき $n = 5$



3 (1) 右の図から

$$P(e, e), \quad Q(1, e)$$



(2) $f(x) = e^x - x \log x$ とおくと

$$f'(x) = e^x - \log x - 1$$

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{x} = e^x - 1 + \frac{x-1}{x}$$

$x > 1$ のとき, $f''(x) > 0$, $f'(1) = e - 1 > 0$ より $f'(x) > 0$

$f(1) = e > 0$ であるから, $x \geq 1$ のとき $f(x) > 0$

よって $x \geq 1$ のとき $e^x > x \log x$

(3) (2) の結果から, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e (e^x - x \log x) dx \\ &= \left[e^x - \frac{x^2}{2} \log x + \frac{x^2}{4} \right]_1^e \\ &= e^e - \frac{e^2}{4} - e - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

■

- 4 (1) 上, 上, 下, 左, 右, 右, 右の7文字を1列に並べる文字列の総数は

$$\frac{7!}{2!1!1!3!} = 420 \text{ (通り)}$$

- (2) 7回の試行で点Pが(2, 1)にあるとき, 取り出したカード書かれた文字列は, (1)の場合と次の場合である.

「上, 左, 左, 右, 右, 右, 右」「上, 上, 上, 下, 下, 右, 右」

したがって, これらの場合の総数は

$$420 + \frac{7!}{1!2!4!} + \frac{7!}{3!2!2!} = 420 + 105 + 210 = 735$$

よって, 求める確率は $\frac{735}{4^7} = \frac{735}{16384}$

- (3) 5回の試行で点Pが x 軸上にあるとき, 取り出したカード書かれた文字列は, 次の場合である. ただし, □は右または左とする.

「□, □, □, □, □」「上, 下, □, □, □」「上, 上, 下, 下, □」

これらの場合の総数は

$$2^5 + \frac{5!}{1!1!3!} \cdot 2^3 + \frac{5!}{2!2!1!} \cdot 2 = 32 + 160 + 60 = 252$$

よって, 求める確率は $\frac{252}{4^5} = \frac{63}{256}$

- (4) 2回の試行により, $X - Y$ は $-2, 0, 2$ のいずれかである.

$X - Y = 0$ となるのは, 「上, 下」「左, 右」「上, 右」「下, 左」となる場合で, その確率は

$$P(X - Y = 0) = \frac{2! + 2! + 2! + 2!}{4^2} = \frac{1}{2}$$

対称性により, $P(X - Y = 2) = P(X - Y = -2)$ であるから

$$P(|X - Y| = 2) = 1 - P(X - Y = 0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

よって, 求める期待値を E とすると

$$E = 0 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 1$$



- 5** (1) $C : a^2x^2 + y^2 = 1$, $l : y = ax + 2a$ の方程式から y を消去すると ($a > 0$)

$$a^2x^2 + (ax + 2a)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 2x + 2 - \frac{1}{2a^2} = 0$$

C と l が異なる 2 点で交わる時、上の第 2 式の係数について

$$D/4 = 1^2 - \left(2 - \frac{1}{2a^2}\right) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2a^2} - 1 > 0$$

$$\text{したがって} \quad a^2 < \frac{1}{2} \quad \text{条件 } a > 0 \text{ より} \quad 0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- (2) C 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は

$$a^2x_0x + y_0y = 1$$

- (3) 条件から、 l は 2 点 P, Q を通る直線である。条件から l は点 $R(X, Y)$ を極とする C の極線 $a^2Xx + Yy = 1 \cdots \textcircled{1}$ に一致する。 $l : y = ax + 2a$ より

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2a}y = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② が一致するから x, y の係数を比較して

$$a^2X = -\frac{1}{2}, \quad Y = \frac{1}{2a}$$

上の 2 式および (1) の結果から

$$X = -\frac{1}{2a^2} = -2\left(\frac{1}{2a}\right)^2 = -2Y^2, \quad Y = \frac{1}{2a} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{よって} \quad X = -2Y^2 \quad \left(Y > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \blacksquare$$

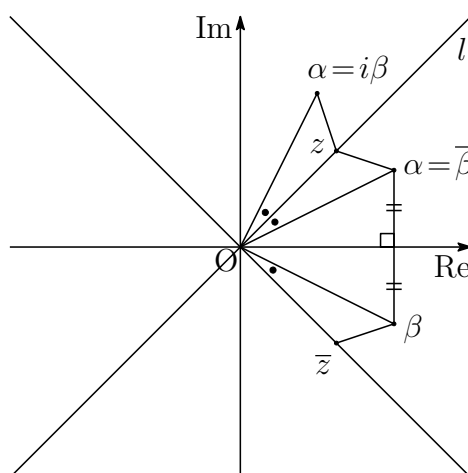
6 (1) $z = t(1+i)$ より $\bar{z} = t(1-i) = -it(1+i) = -iz \quad \cdots (*)$

(i) $\alpha = i\beta$ のとき

$$\frac{|\bar{z} - \beta|}{|z - \alpha|} = \frac{|-iz - \beta|}{|z - i\beta|} = \frac{|-i(z - i\beta)|}{|z - i\beta|} = |-i| = 1$$

(ii) $\alpha = \bar{\beta}$ のとき

$$\frac{|\bar{z} - \beta|}{|z - \alpha|} = \frac{|\overline{z - \bar{\beta}}|}{|z - \alpha|} = \frac{|z - \alpha|}{|z - \alpha|} = 1$$



(i), (ii) より, 題意は成立する.

(2) l 上のすべての点 z に対して $\left| \frac{\bar{z} - \beta}{z - \alpha} \right| = 1$ より

$$|z - \alpha| = |\bar{z} - \beta| \quad \cdots \textcircled{1}$$

$z = 0$ を代入すると $|\alpha| = |\beta| \quad \cdots \textcircled{2}$ また $|z| = |\bar{z}| \quad \cdots \textcircled{3}$

①~③ より, $\angle \alpha 0 z = \angle \beta 0 \bar{z}$ であり, z と $\bar{z}$ が実軸に関して対称であるから

$$\alpha = i\beta \quad \text{または} \quad \alpha = \bar{\beta}$$

(3) l 上の異なる 2 定点 z_1, z_2 について, (*) より

$$\bar{z}_1 = -iz_1, \quad \bar{z}_2 = -iz_2$$

$\frac{\bar{z}_1 - \beta}{z_1 - \alpha} = \frac{\bar{z}_2 - \beta}{z_2 - \alpha}$ であるとき

$$\frac{-iz_1 - \beta}{z_1 - \alpha} = \frac{-iz_2 - \beta}{z_2 - \alpha} \quad \text{ゆえに} \quad (i\alpha + \beta)(z_1 - z_2) = 0$$

$z_1 \neq z_2$ であるから $\beta = -i\alpha$ これと (*) より, l 上の点 z に対し

$$\gamma = \frac{\bar{z} - \beta}{z - \alpha} = \frac{-iz + i\alpha}{z - \alpha} = \frac{-i(z - \alpha)}{z - \alpha} = -i$$

■