

平成13年度 広島大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・医・歯・薬・教育(自然系・理数系)・
総合学科(理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5 6

1 z は $0^\circ < \arg z < 90^\circ$ を満たす複素数とし、複素数平面上の3点 $O(0)$, $A(1)$, $B(z)$ を頂点とする $\triangle OAB$ を考える. また, $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ とおく.

- (1) $\alpha^2 - \alpha + 1$ の値を求めよ.
- (2) 点 $P(w)$ を直線 OB に関して点 A と反対側に, $\triangle POB$ が正三角形になるようにとる. 複素数 w を z と α を用いて表せ.
- (3) 点 $Q(z + \alpha - \alpha z)$ に対し, $\triangle ABQ$ は正三角形であることを示せ.
- (4) $\arg \left(\frac{z + \alpha - \alpha z}{w - 1} \right)$ を求めよ. ただし, 偏角の範囲は, 0° 以上 360° 未満とする.

2 $a > 0$ とし, 極方程式 $r = 2a \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$) で表される曲線を C とする.

- (1) 曲線 C は円の一部であることを示し, その円の中心と半径を求めよ. さらに, 曲線 C を図示せよ.
- (2) 曲線 C と x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた図形を, x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ.

3 数列 $\{a_n\}$ は, 関係式

$$a_1 = 2, \quad (a_{n+1} - a_n)^2 = 2(a_{n+1} + a_n), \quad a_{n+1} > a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定まっている.

- (1) a_2, a_3, a_4 を計算せよ.
- (2) 一般項 a_n を n の式で表せ.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$ を求めよ.

4 次のそれぞれの問いに答えよ.

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ が $AB = O$ を満たすとき, 行列 A の4つの成分の積 $abcd$ は正または0であることを示せ.
- (2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持たず, 3つの成分が正であるとき, 残りの1つの成分も正であることを示せ.
- (3) A, B を 2×2 行列とする. $AB = O$ かつ $B \neq O$ ならば, A の逆行列 A^{-1} は存在しないことを示せ.

5 関数 $f(x)$ が任意の実数 x に対して

$$f(x) = x^2 - \int_0^x (x-t)f'(t) dt$$

を満たすとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(0)$ の値を求め, さらに $f'(x) = 2x - f(x)$ が成り立つことを示せ.
- (2) $(e^x f(x))' = 2xe^x$ を示せ.
- (3) $f(x)$ を求めよ.

6 A, B, C の3人が優勝決定戦を行う. まず3人のうち2人が対戦し, その勝者が残りの1人と対戦する. これをくり返して, 2回続けて勝ったものを優勝者とする. A と B が対戦したときにそれぞれが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ とし, C が A または B と対戦したときに C が勝つ確率は p ($0 < p < 1$), 負ける確率は $1-p$ とする. 第1回戦は A と B の対戦として次の問いに答えよ.

- (1) 第2回戦では第1回戦の勝者が残りの C と対戦する. C が負ければ勝者は優勝者となるが, C が勝てば C は第1回戦の敗者と第3回戦を行う. 第3回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者を順に並べると, ACC と BCC の2通りの順列が得られる. 第4回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者の順列を答えよ.
- (2) 第 m 回戦で優勝者が決まる確率を F_m とする. F_2, F_3, F_4 をそれぞれ求めよ.
- (3) 2以上の自然数 n に対して, 確率 F_{3n} を求めよ.
- (4) $\sum_{n=1}^{\infty} F_{3n}$ を計算せよ.

解答例

1 (1) $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ より $\alpha + \bar{\alpha} = 1, \quad \alpha\bar{\alpha} = 1$

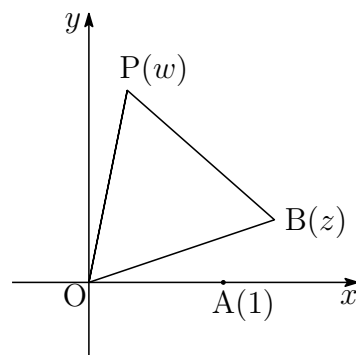
したがって, α は 2 次方程式 $x^2 - x + 1 = 0$ の解である.

よって $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$

(2) $\alpha = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$

右の図から

$$w = \alpha z$$



(3) $u = z + \alpha - \alpha z$ とおくと $u - z = \alpha(1 - z)$

したがって, 点 $Q(u)$ は点 $A(1)$ を点 $B(z)$ を中心に 60° 回転した点である.

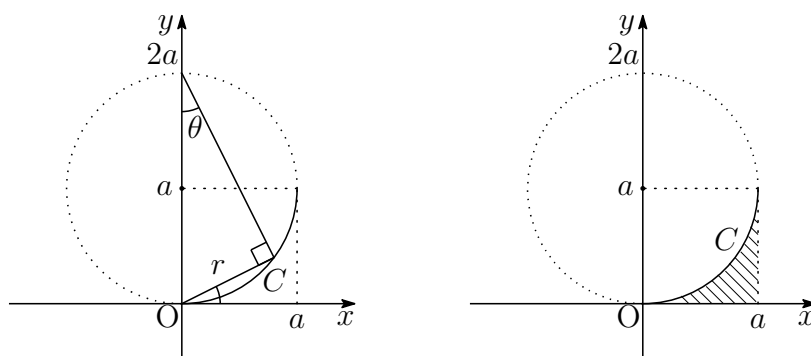
よって, $\triangle ABQ$ は正三角形である.

(4) (1), (2) の結果から

$$\frac{z + \alpha - \alpha z}{w - 1} = \frac{(1 - \alpha)z + \alpha}{\alpha z} = \frac{-\alpha^2 z + \alpha}{\alpha z - 1} = -\alpha$$

よって $\arg \frac{z + \alpha - \alpha z}{w - 1} = \arg(-\alpha) = 180^\circ + 60^\circ = \mathbf{240^\circ}$ ■

- 2 (1) 左下の図から, C は中心 $(0, a)$, 半径 a の円の一部 (実線部分) である.



- (2) (1) の結果から $C: y = a - \sqrt{a^2 - x^2} \ (0 \leq x \leq a)$

右上の図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転させたものが求める立体の体積で, その体積を V とすると

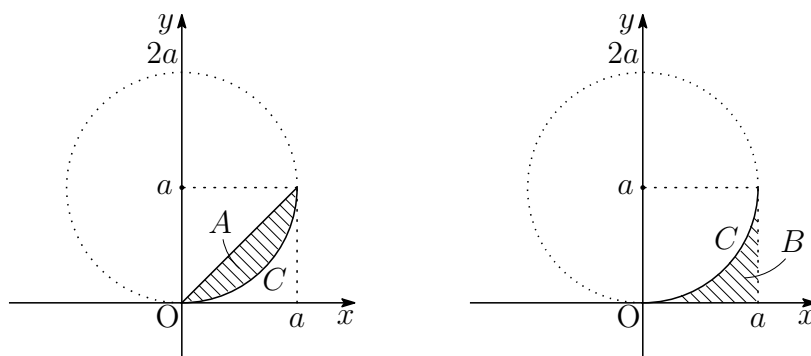
$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^a y^2 dx = \int_0^a (2a^2 - x^2 - 2a\sqrt{a^2 - x^2}) dx \\ &= \left[2a^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a - 2a \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{5}{3}a^3 - 2a \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} \right) a^3 \end{aligned}$$

よって $V = \pi \left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} \right) a^3$

別解 下の図の 2 つの領域 A, B を x 軸の周りに回転させた回転体の体積をそれぞれ V_A, V_B とすると ¹

$$V_A = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3 \sin \theta d\theta = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2a \sin \theta)^3 \sin \theta d\theta = \frac{\pi a^3}{6} (3\pi - 8)$$

$$V_A + V_B = \frac{\pi a^3}{3} \text{ より } V_B = \frac{\pi a^3}{3} - \frac{\pi a^3}{6} (3\pi - 8) = \pi \left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} \right) a^3 \quad \blacksquare$$



¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2016.pdf (p.12 を参照)

3 (1) $(a_{n+1} - a_n)^2 = 2(a_{n+1} + a_n)$ より

$$a_{n+1} = a_n + 1 \pm \sqrt{4a_n + 1}$$

$a_1 = 2, a_{n+1} > a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であるから

$$a_{n+1} = a_n + 1 + \sqrt{4a_n + 1} \quad (*)$$

(*) より $a_2 = 6, a_3 = 12, a_4 = 20$

(2) (1) の結果から

$$a_n = n(n+1) \quad (**)$$

と仮定すると

[1] $n = 1$ のとき, (**) は成立する.

[2] $n = k$ のとき, (**) が成立すると仮定すると, (*) より

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= k(k+1) + 1 + \sqrt{4k(k+1) + 1} \\ &= k^2 + k + 1 + (2k + 1) = k^2 + 3k + 2 \\ &= (k+1)(k+2) \end{aligned}$$

したがって, $n = k+1$ のときも成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について, (**) が成立する.

(3) (**) より

$$\begin{aligned} \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} &= \sqrt{(n+1)(n+2)} - \sqrt{n(n+1)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2) - n(n+1)}{\sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{n(n+1)}} \\ &= \frac{2(n+1)}{\sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{n(n+1)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} + \sqrt{\frac{n}{n+1}}} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) = \frac{2}{1+1} = 1$$

■

$$\boxed{4} \quad (1) \quad AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+2b & 2a+b \\ 4c+2d & 2c+d \end{pmatrix}$$

$AB = O$ であるから $2a+b=0, \quad 2c+d=0$

$$b = -2a, \quad d = -2c \text{ より } abcd = a(-2a)c(-2c) = 4a^2c^2 \geq 0$$

(2) A は逆行列を持たないから $ad-bc=0$ ゆえに $ad=bc$
よって、3つの成分が正であるとき、残りの1つの成分も正である。

(3) A が正則であると仮定すると、 $AB=O$ より $B=O$
これは、 $B \neq O$ に反する。したがって、 A は正則でない。
よって、 A^{-1} は存在しない。 ■

$$\boxed{5} \quad (1) \quad (*) \quad f(x) = x^2 - \int_0^x (x-t)f'(t) dt \text{ より } f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - x \int_0^x f'(t) dt + \int_0^x t f'(t) dt \\ &= x^2 - x f(x) + \int_0^x f'(t) dt \end{aligned}$$

両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - f(x) - x f'(x) + x f'(x) \\ &= 2x - f(x) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$e^x f(x) + e^x f'(x) = 2xe^x \quad \text{ゆえに} \quad (e^x f(x))' = 2xe^x$$

(3) (2) の結果を積分すると

$$e^x f(x) = \int 2xe^x dx = 2e^x(x-1) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$f(0) = 0 \text{ であるから } 0 = -2 + C \quad \text{ゆえに} \quad C = 2$$

$$\text{したがって} \quad e^x f(x) = 2e^x(x-1) + 2$$

$$\text{よって} \quad f(x) = 2(x-1) + 2e^{-x} \quad \text{■}$$

6 (1) 第4回戦で優勝者が決まる順列は **ACBB** または **BCAA**

(2) 第2回戦で優勝者が決まる順列は **AA** または **BB**

$$\text{ゆえに } F_2 = \frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}(1-p) = 1-p$$

第3回戦で優勝者が決まる順列は **ACC** または **BCC**

$$\text{ゆえに } F_3 = \frac{1}{2}pp + \frac{1}{2}pp = p^2$$

(1)の結果から

$$F_4 = \frac{1}{2}p(1-p)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p(1-p)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}p(1-p)$$

(3) 第 $3n$ 回戦で優勝者が決まるのは、次の順列である.

- **ACB** が $n-1$ 回繰り返す, 最後の3回が **ACC**
- **BCA** が $n-1$ 回繰り返す, 最後の3回が **BCC**

したがって

$$\begin{aligned} F_{3n} &= \left\{ \frac{1}{2}p(1-p) \right\}^{n-1} \cdot \frac{1}{2}pp + \left\{ \frac{1}{2}p(1-p) \right\}^{n-1} \cdot \frac{1}{2}pp \\ &= p^2 \left\{ \frac{1}{2}p(1-p) \right\}^{n-1} \end{aligned}$$

(4) $0 < p < 1$ より, $0 < \frac{1}{2}p(1-p) \leq \frac{1}{8}$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_{3n} = \frac{p^2}{1 - \frac{1}{2}p(1-p)} = \frac{2p^2}{2 - p + p^2}$$

