令和７年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・経済 (昼)・歯 (口腔健康科学 (口腔保健))

問題 1 2 3 4

1 1個のさいころを3回投げ，出た目を順に a_1, a_2, a_3 とする．次の問いに答えよ．

(1) 集合 $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ が集合 $\{2,\ 5,\ 6\}$ と等しくなる確率を求めよ．

(2) $a_1 < a_2 < a_3$ である確率を求めよ．

(3) a_1, a_2, a_3 がすべて異なる確率を求めよ．

(4) 集合 $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ と集合 $\{2,\ 3\}$ が等しいとき，$a_1 = 3$，$a_2 = 2$，$a_3 = 3$ である条件付き確率を求めよ．

(5) $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} = 1$ である確率を求めよ．

2 $t > 0$ とする．また，a, b を実数とし，二つの関数 $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$，$g(x) = x^2 + ax + b$ を考える．座標平面上の二つの曲線 $C_1 : y = f(x)$，$C_2 : y = g(x)$ は x 座標が t である共有点 P をもち，かつ点 P において共通の接線をもつとする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ．

(2) a, b をそれぞれ t を用いて表せ．

(3) $t > 0$ における関数

$$F(t) = \int_0^1 \{g(x) - f(x)\}\, dx$$

の最小値を求めよ．

3 $a>0$ とし，p を実数とする．座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を考える．P_n，Q_n，R_n $(n=1,2,3,\cdots)$ が以下の二つの条件を満たすとする．

(i) 点 P_1 は直線 AB 上にあり，x 座標が p である．

(ii) 自然数 n に対し，

- 点 P_n から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点が Q_n である．ただし，点 P_n が x 軸上にあるときは，点 Q_n は P_n と同じ点であるとする．
- 点 Q_n から直線 AC に下ろした垂線と直線 AC との交点が R_n である．ただし，点 Q_n が直線 AC 上にあるときは，点 R_n は Q_n と同じ点であるとする．
- 点 R_n を通り x 軸と平行な直線と直線 AB との交点が P_{n+1} である．

点 P_n の x 座標を x_n とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 R_1 の座標を a，p を用いて表せ．

(2) 命題

「点 P_1 が線分 AB 上にあるならば，点 R_1 は線分 AC 上にある」が真であるような a の値の範囲を求めよ．ただし，線分は両端を含むものとする．

(3) x_n を a，n，p を用いて表せ．

(4) $a=2$，$p=0$ であるとき，不等式

$$|x_{n+1}-x_n|<10^{-10}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする．

$\boxed{4}$ θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする．$\mathrm{O}(0,\ 0)$ を原点とする座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ 0)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ に対して，点 C および点 D を以下の条件により定める．

(i) D は線分 OB 上の点である．

(ii) C は直線 OB に関して A と異なる側にある．

(iii) $\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{CDB}$ は合同である．すなわち，$\mathrm{OA}=\mathrm{CD}$，$\mathrm{AB}=\mathrm{DB}$，$\mathrm{BO}=\mathrm{BC}$ が成り立つ．

次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を θ を用いて成分表示せよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ を θ を用いて成分表示せよ．

(3) C の y 座標を $f(\theta)$ とする．θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(\theta)$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(4) $\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{3}{4}\pi$ となるとき，θ の値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $3!\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\mathbf{\dfrac{1}{36}}$

(2) ${}_6\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\mathbf{\dfrac{5}{54}}$

(3) ${}_6\mathrm{P}_3\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\mathbf{\dfrac{5}{9}}$

別解 $a_2\neq a_1,\ a_3\notin\{a_1,\ a_2\}$ であるから $\dfrac{5}{6}\times\dfrac{4}{6}=\mathbf{\dfrac{5}{9}}$

(4) $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ が $\{2,\ 3\}$ と等しい事象を A，$a_1=3,\ a_2=2,\ a_3=3$ である事象を B とする．事象 A となる組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は次の 6 組である．

$$\begin{aligned}(a_1,a_2,a_3)=&(2,2,3),(2,3,2),(3,2,2),\\&(2,3,3),(3,2,3),(3,3,2)\end{aligned}$$

したがって $P(A)=6\left(\dfrac{1}{6}\right)^3$

$P(A\cap B)=\left(\dfrac{1}{6}\right)^3$

よって，求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\left(\frac{1}{6}\right)^3\Big/6\left(\frac{1}{6}\right)^3=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

(5) まず，次式を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ を求める．

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1,\quad x\geqq y\geqq z \qquad (*)$$

z の値の範囲について

$$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1}{z},\quad 1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}$$

上の 2 式から $z>1,\ z\leqq 3$ すなわち $z=2,\ 3$

(i) $z=2$ のとき　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$

$$xy-2x-2y=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-2)(y-2)=4$$

これを解いて　$(x,\ y)=(4,\ 4),\ (6,\ 3)$

(ii) $z=3$ のとき　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{3}$

$$2xy-3x-3y=0 \quad \text{ゆえに} \quad (2x-3)(2y-3)=9$$

これを解いて　$(x,\ y)=(3,\ 3)$

(i)，(ii) より，$(*)$ の解は　$(x,\ y,\ z)=(4,\ 4,\ 2),\ (6,\ 3,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3)$

- $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ が $(4,\ 4,\ 2)$ からなる場合は　$\dfrac{3!}{2!1!}=3$ (通り)
- $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ が $(6,\ 3,\ 2)$ からなる場合は　$3!=6$ (通り)
- $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ が $(3,\ 3,\ 3)$ からなる場合は　1 (通り)

よって求める確率は　$(3+6+1)\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{5}{108}}$　■

2 (1) $f(x)=-x^3-3x^2+4$ より　$f'(x)=-3x^2-6x=-3x(2+2)$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって　**極小値 $\boldsymbol{f(-2)=0}$，極大値 $\boldsymbol{f(0)=4}$**

(2) $g(x)=x^2+ax+b$ より　$g'(x)=2x+a$

条件から　$f(t)=g(t),\ f'(t)=g'(t)$

$$-t^3-3t^2+4=t^2+at+b, \quad -3t^2-6t=2t+a \qquad (*)$$

$(*)$ の第 2 式から　$\boldsymbol{a=-3t^2-8t}$

これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$-t^3-3t^2+4=t^2+(-3t^2-8t)t+b$$

したがって　$\boldsymbol{b=2t^3+4t^2+4}$

(3) (2) の結果から　$g(x) = x^2 - (3t^2 + 8t)x + 2t^3 + 4t^2 + 4$ より

$$g(x) - f(x) = x^3 + 4x^2 - (3t^2 + 8t)x + 2t^3 + 4t^2$$

したがって

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^1 \{g(x) - f(x)\}\,dx \\ &= \int_0^1 \{x^3 + 4x^2 - (3t^2 + 8t)x + 2t^3 + 4t^2\}\,dx \\ &= \left[\ \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3t^2 + 8t)x^2 + (2t^3 + 4t^2)x\ \right]_0^1 \\ &= 2t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 4t + \frac{19}{12}, \\ F'(t) &= 6t^2 + 5t - 4 \\ &= (2t - 1)(3t + 4) \end{aligned}$$

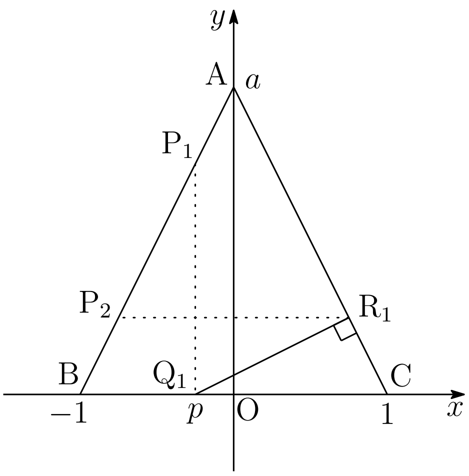
$t > 0$ における $F(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$F'(t)$		$-$	0	$+$
$F(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって　　**最小値** $\boldsymbol{F\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{11}{24}}$ ■

3 (1) 点 P_1 の x 座標が p であるから，
点 Q_1 の座標は　　$(p,\ 0)$
直線 AC の方程式は $(a > 0)$

$$y = -ax + a \quad \cdots ①$$



点 Q_1 を通り，直線 AC に垂直な直線の方程式は

$$y = \frac{1}{a}(x - p) \quad \cdots ②$$

点 R_1 は 2 直線 ①，② の交点であるから，これを解いて

$$\mathbf{R_1}\left(\boldsymbol{\frac{p + a^2}{1 + a^2},\ \frac{a(1 - p)}{1 + a^2}}\right)$$

(2) 「点 P_1 が線分 AB 上にあるならば，点 R_1 は線分 AC 上にある」から，2 点 P_1，R_1 のそれぞれの x 座標に着目すると

$$-1 \leqq p \leqq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqq \frac{p+a^2}{1+a^2} \leqq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -a^2 \leqq p \leqq 1$$

この命題が真であるから　　$-a^2 \leqq -1$

$a>0$ に注意して解くと　　$\boldsymbol{a \geqq 1}$

(3) 点 P_2 は，直線 AB : $y=ax+a$ 上の点であり，その y 座標は点 R_1 の y 座標と等しい．したがって，P_2 の x 座標 x_2 は

$$\frac{a(1-p)}{1+a^2} = ax_2 + a \quad \text{ゆえに} \quad x_2 = -\frac{p+a^2}{1+a^2}$$

よって，次の $\{x_n\}$ の漸化式を得る．

$$x_1 = p, \quad x_{n+1} = -\frac{x_n + a^2}{1+a^2}$$

これから　　$x_{n+1} + \dfrac{a^2}{2+a^2} = -\dfrac{1}{1+a^2}\left(x_n + \dfrac{a^2}{2+a^2}\right)$

$$x_n + \frac{a^2}{2+a^2} = \left(p + \frac{a^2}{2+a^2}\right)\left(-\frac{1}{1+a^2}\right)^{n-1}$$

$$\boldsymbol{x_n = \left(p + \frac{a^2}{2+a^2}\right)\left(-\frac{1}{1+a^2}\right)^{n-1} - \frac{a^2}{2+a^2}}$$

(4) $a=2$，$p=0$ を (3) の結果に代入すると

$$x_n = \frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1\right\}$$

したがって

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n} - 1\right\} - \frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1\right\}$$
$$= -\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 4\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}$$

$|x_{n+1} - x_n| = 4\cdot 5^{-n}$ であるから，$|x_{n+1} - x_n| < 10^{-10}$ を満たすとき

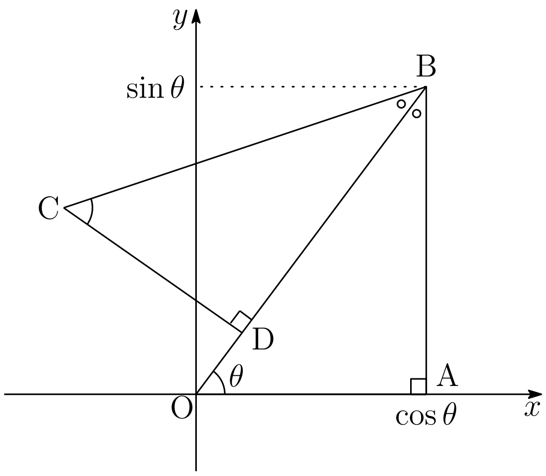
$$\log_{10}(4\cdot 5^{-n}) < -10 \quad \text{ゆえに} \quad n > \frac{10+\log_{10}4}{\log_{10}5} \qquad (*)$$

$$\frac{10+\log_{10}4}{\log_{10}5} = \frac{10+2\log_{10}2}{1-\log_{10}2} = \frac{10+2\times 0.3010}{1-0.3010} = \frac{10.6020}{0.6990} = 15.1\cdots$$

よって，$(*)$ を満たす最小の自然数 n は　　$\boldsymbol{n = 16}$　■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\mathrm{OB}=1$, $\mathrm{DB}=\mathrm{AB}=\sin\theta$ より　$\mathrm{OD}=\mathrm{OB}-\mathrm{DB}=1-\sin\theta$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=\mathrm{OD}(\cos\theta,\ \sin\theta)=(1-\sin\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)\\&=\boldsymbol{(\cos\theta-\sin\theta\cos\theta,\ \sin\theta-\sin^2\theta)}\end{aligned}$$



(2) $\mathrm{DC}=\mathrm{OA}=\cos\theta$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ の偏角が $\theta+\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DC}}&=\mathrm{DC}\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\&=\cos\theta(-\sin\theta,\ \cos\theta)=\boldsymbol{(-\sin\theta\cos\theta,\ \cos^2\theta)}\end{aligned}$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}\\&=(\cos\theta-\sin\theta\cos\theta,\ \sin\theta-\sin^2\theta)+(-\sin\theta\cos\theta,\ \cos^2\theta)\\&=(\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta,\ \sin\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\&=(\cos\theta-\sin 2\theta,\ \sin\theta+\cos 2\theta)\qquad(*)\end{aligned}$$

したがって，点 C の y 座標 $f(\theta)$ は

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\sin\theta+\cos 2\theta\\&=-2\sin^2\theta+\sin\theta+1\\&=-2\left(\sin\theta-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}\end{aligned}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\sin\theta<1$ であるから

$$\boldsymbol{0<f(\theta)\leqq\frac{9}{8}}$$

(4) $\angle \mathrm{AOC} = \dfrac{3}{4}\pi$ であるから，$(*)$ より　$\dfrac{\sin\theta + \cos 2\theta}{\cos\theta - \sin 2\theta} = \tan\dfrac{3}{4}\pi = -1$

$$\sin\theta + \cos 2\theta = -(\cos\theta - \sin 2\theta)$$
$$\cos 2\theta + \cos\theta = \sin 2\theta - \sin\theta$$
$$2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

したがって

$$\cos\frac{3\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos\frac{3\theta}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < \dfrac{3\theta}{2} < \dfrac{3\pi}{4}$，$-\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4} < 0$ であるから

$$\frac{3\theta}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

■