令和６年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・経済 (昼)・歯 (口腔健康科学 (口腔保健))

問題 1 2 3 4

1 A，B，C，D，E の 5 人が，それぞれゲーム α とゲーム β の 2 種類のゲームを行った．ゲーム α の得点を x，ゲーム β の得点を y で表す．下の表はそれぞれのゲームにおける得点である．ただし，a，b は整数である．なお，得点が負になることもあり得る．

	A	B	C	D	E
得点 x	7	6	8	a	4
得点 y	0	-4	-1	2	b

ゲーム α の得点 x の平均値は 7 であるとし，ゲーム β の得点 y の平均値を m とする．次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) p，q は実数で，$p \neq 0$ とする．ゲーム β の得点 y を $z = py + q$ により変換し，新たな変量 z を作成する．z の分散を ${s_z}^2$，二つの変量 x，z の共分散を s_{xz} とする．このとき，${s_z}^2$ と s_{xz} を p，q，m のうちの必要なものを用いて表せ．ただし，変量 x と z の共分散は x の偏差と z の偏差の積の平均値である．

(3) 変量 x と (2) で作った変量 z の相関係数が $\dfrac{3}{4}$ であるとき，m と b の値を求めよ．また，p が正であるか負であるかを答えよ．

2 実数 t および $0 < a < b$ を満たす実数 a，b に対し，

$$f(t) = \int_a^b (x - at)(x - bt)\,dx$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $f(0)$ を a と b を用いて表せ．

(2) $14f(1) + f(0) = 0$ が成り立つとする．このとき，$\dfrac{b}{a}$ の値を求めよ．

(3) $14f(1) + f(0) = 0$ が成り立つとする．t の関数 $y = f(t) - f(0)$ の最小値が -6 となるとき，a の値を求めよ．

3 座標空間内の 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 1)$，C$(1,\ 2, -1)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．

(2) 点 O，A，B を通る平面を α とする．点 C から平面 α に下した垂線と平面 α の交点を M とする．点 M の座標を求めよ．

(3) 点 M を (2) で定めた点とする．点 D を直線 CM 上の点であって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$$

となるものとする．ただし，点 D は点 C とは異なる点である．このとき，点 D の座標を求めよ．

(4) 点 D を (3) で定めた点とする．三角形 CAD の面積 S を求めよ．

4 a と r を正の実数とする．座標平面上の放物線 $y = x^2$ と，中心 $(0,\ a)$，半径 r の円 C を考える．次の問いに答えよ．

(1) $a = r$ とする．このとき，放物線 $y = x^2$ と円 C との共有点が一つのみになるような r の値の範囲を求めよ．

(2) 円 C が不等式 $y > 0$ の表す領域に含まれるための必要十分条件を a と r を用いて表せ．

(3) a と r は (2) で求めた条件を満たすとする．このとき，放物線 $y = x^2$ と円 C との共有点がちょうど二つになるような $(r,\ a)$ の範囲を ra 平面に図示せよ．

(4) 正の実数 s に対し，中心 $(0,\ a + r + s)$，半径 s の円を C' とする．円 C と円 C' は次の条件 (i) と (ii) を満たすとする．

(i) 円 C は不等式 $y > 0$ の表す領域に含まれ，さらに放物線 $y = x^2$ と円 C との共有点はちょうど二つである．

(ii) 放物線 $y = x^2$ と円 C' との共有点はちょうど二つである．

このとき，s を r を用いて表せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 得点 x の平均が 7 であるから

$$\frac{7+6+8+a+4}{5}=7 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=10}$$

(2) 得点 y の平均値が m であるから

$$\frac{0+(-4)+(-1)+2+b}{5}=m \quad \text{ゆえに} \quad b=5m+3 \quad \cdots ①$$

したがって，得点 y の分散 ${s_y}^2$ は

$$\begin{aligned}{s_y}^2 &= \frac{0^2+(-4)^2+(-1)^2+2^2+(5m+3)^2}{5}-m^2 \\ &= 4m^2+6m+6\end{aligned}$$

$z=py+q$ より $\quad {s_z}^2=p^2{s_y}^2=\boldsymbol{p^2(4m^2+6m+6)}$

x と y の共分散 s_{xy} は

$$\begin{aligned}s_{xy} &= \frac{7{\cdot}0+6{\cdot}(-4)+8{\cdot}(-1)+10{\cdot}2+4{\cdot}(5m+3)}{5}-7{\cdot}m \\ &= -3m\end{aligned}$$

$z=py+q$ より $\quad s_{xz}=ps_{xy}=p{\cdot}(-3m)=\boldsymbol{-3pm}$

(3) 得点 x の分散 ${s_x}^2$ は

$$ {s_x}^2=\frac{(7-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(10-7)^2+(4-7)^2}{5}=4$$

$s_x=2$，$s_z=|p|\sqrt{4m^2+6m+6}$，$\dfrac{s_{xz}}{s_xs_z}=\dfrac{3}{4}$ より

$$\frac{-3pm}{2{\cdot}|p|\sqrt{4m^2+6m+6}}=\frac{3}{4} \qquad (*)$$

上式の辺々を平方することにより

$$\frac{9m^2}{4(4m^2+6m+6)}=\frac{9}{16} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{m=-1} \quad \cdots ②$$

これを $(*)$ に代入して整理すると $\dfrac{p}{|p|}=1$ ゆえに $\boldsymbol{p>0}$

② を ① に代入すると $b=3{\cdot}(-1)+5=\boldsymbol{2}$ ■

$\boxed{2}$ (1) $f(0)=\displaystyle\int_a^b x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b=\boldsymbol{\frac{b^3-a^3}{3}}$

(2) $f(1)=\displaystyle\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx=-\frac{1}{6}(b-a)^3$

上式および (1) の結果を $14f(1)+f(0)=0$ に代入すると $(0<a<b)$

$$-\frac{7}{3}(b-a)^3+\frac{b^3-a^3}{3}=0 \quad \text{ゆえに} \quad -7(b-a)^2+b^2+ab+a^2=0$$

整理すると　$2a^2-5ab+2b^2=0$　ゆえに　$(b-2a)(2b-a)=0$

$b>a>0$ より　$b=2a$　よって　$\boldsymbol{\frac{b}{a}=2}$

(3) 与えられた条件を満たすとき，(2) の結果から $b=2a$ であるから

$$f(0)=\frac{(2a)^3-a^3}{3}=\frac{7}{3}a^3,$$

$$\begin{aligned}f(t)&=\int_a^{2a}(x-at)(x-2at)\,dx=\int_a^{2a}(x^2-3atx+2a^2t^2)\,dx\\&=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}atx^2+2a^2t^2x\right]_a^{2a}=2a^3t^2-\frac{9}{2}a^3t+\frac{7}{3}a^3\end{aligned}$$

したがって　$\begin{aligned}y&=f(t)-f(0)=2a^3t^2-\frac{9}{2}a^3t\\&=2a^3\left(t-\frac{9}{8}\right)^2-\frac{81}{32}a^3\end{aligned}$

y の最小値が -6 であるから，$2a^3>0$ に注意して

$$-\frac{81}{32}a^3=-6 \quad \text{ゆえに} \quad a^3=\frac{64}{27} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=\frac{4}{3}}$$

■

3 (1) $\vec{a}=(1,1,0),\ \vec{b}=(0,\ 1,\ 1),\ \vec{c}=(1,2,-1)$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot0+1\cdot1+0\cdot1=\mathbf{1}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{c}=1\cdot1+1\cdot2+0\cdot(-1)=\mathbf{3}$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=0\cdot1+1\cdot2+1\cdot(-1)=\mathbf{1}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,-1,\ 1)$ より，平面 α 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$ より，平面 α の方程式は

$$x-y+z=0$$

点 $\mathrm{C}(1,\ 2,-1)$ を通り，方向ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の直線の方程式は

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}=t\quad(t\text{ は媒介変数})$$

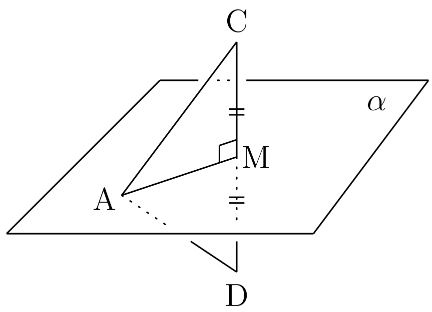
これから　$x=t+1,\quad y=-t+2,\quad z=t-1\quad\cdots(*)$

$(*)$ を平面 α の方程式に代入すると

$$(t+1)-(-t+2)+(t-1)=0\quad\text{ゆえに}\quad t=\frac{2}{3}$$

これを $(*)$ に代入して　$x=\frac{5}{3},\ y=\frac{4}{3},\ z=-\frac{1}{3}$　よって　$\mathbf{M}\left(\boldsymbol{\frac{5}{3},\ \frac{4}{3},-\frac{1}{3}}\right)$

(3) 条件から，M は CD の中点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=2\left(\frac{5}{3},\ \frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)-(1,\ 2,-1)\\&=\left(\frac{7}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{D}\left(\boldsymbol{\frac{7}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}}\right)$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{CD}}=\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$ より

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}||\overrightarrow{\mathrm{AM}}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{6}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{2}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ と点 $\mathrm{R}(0,\ r)$ について，関数

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathrm{RP}^2-r^2 = t^2+(t^2-r)^2-r^2 \\ &= t^4-(2r-1)t^2 = t^2\{t^2-(2r-1)\} \end{aligned}$$

を考えると，条件を満たすとき，$f(t) \geqq 0$ で，等号が成立するのが $t=0$ のときに限られるから

$$2r-1 \leqq 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{0 < r \leqq \frac{1}{2}}$$

(2) 円 C の方程式は　$x^2+(y-a)^2=r^2$

C 上の点の y 座標がとり得る値の範囲は　$(y-a)^2 \leqq r^2$

$$|y-a| \leqq r \quad \text{ゆえに} \quad a-r \leqq y \leqq a+r$$

領域 $y>0$ に含まれるから　$a-r>0$　よって　$\boldsymbol{a > r}$

(3) 放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ と点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ について，関数

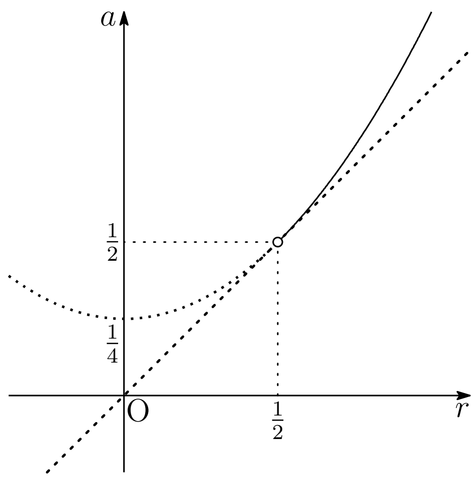
$$\begin{aligned} g(t) &= \mathrm{AP}^2-r^2 = t^2+(t^2-a)^2-r^2 \\ &= t^4-(2a-1)t^2+a^2-r^2 = \left(t^2-\frac{2a-1}{2}\right)^2+a-r^2-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

を考えると，条件を満たすとき，$g(t) \geqq 0$ で，等号が成立するときの t の値が 2 つだけ存在するから

$$\frac{2a-1}{2}>0,\quad a-r^2-\frac{1}{4}=0 \quad \text{ゆえに} \quad a>\frac{1}{2},\quad a=r^2+\frac{1}{4}$$

(2) の条件と合わせて　$a>\dfrac{1}{2},\quad a>r,\quad a=r^2+\dfrac{1}{4}\quad (r>0)$

よって，$(r,\ a)$ の範囲は下の図の実線部分である ($\circ$ は含まない).



(4) (3) の結果から，C について　$a = r^2 + \dfrac{1}{4}$

これを C' について適用すると　$a + r + s = s^2 + \dfrac{1}{4}$

上の 2 式から，a を消去すると

$$r + s = s^2 - r^2 \quad \text{ゆえに} \quad (r + s)(r - s + 1) = 0$$

$r + s > 0$ より　$r - s + 1 = 0$　よって　$\boldsymbol{s = r + 1}$ ■