令和５年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・経済 (昼)・歯 (口腔健康科学 (口腔保健))

問題 1 2 3 4

1 箱の中に 1 から N までの番号が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている．ただし，N は 4 以上の自然数である.「この箱からカードを 1 枚取り出し，書かれた番号を見てもとに戻す」という試行を考える．この試行を 4 回繰り返し，カードに書かれた番号を順に X，Y，Z，W とする．次の問いに答えよ．

(1) $X=Y=Z=W$ となる確率を求めよ．

(2) X，Y，Z，W が四つの異なる番号からなる確率を求めよ．

(3) X，Y，Z，W のうち三つが同じ番号で残り一つが他と異なる番号である確率を求めよ．

(4) X，Y，Z，W が三つの異なる番号からなる確率を求めよ．

2 a，d を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を初項 a，公差 d の等差数列とする．数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．$a_3=S_2=18$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1) a，d の値を求めよ．

(2) S_n を n を用いて表せ．

(3) 数列 $\{S_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とし，数列 $\{U_n\}$ を

$$U_n=T_n-4S_n+5a_n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

により定める．U_n が最小となるときの n の値をすべて求め，さらにそのときの U_n の値を求めよ．

(4) (3) で定めた数列 $\{U_n\}$ の初項から第 7 項までの和を V とする．c を実数とし，関数 $f(x)=3x^2+cx+36$ を考える．定積分 $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$ が V に等しいとき，c の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 空間内の6点A，B，C，D，E，Fは1辺の長さが1の正八面体の頂点であり，四角形ABCDは正方形であるとする．$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積$\vec{b}\cdot\vec{d}$，$\vec{b}\cdot\vec{e}$，$\vec{d}\cdot\vec{e}$の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=p\vec{b}+q\vec{d}+r\vec{e}$を満たす実数$p$，$q$，$r$の値を求めよ．

(3) 辺BEを$1:2$に内分する点をGとする．また，$0<t<1$を満たす実数tに対し，辺CFを$t:(1-t)$に内分する点をHとする．tが$0<t<1$の範囲を動くとき，△AGHの面積が最小となるtの値とそのときの△AGHの面積を求めよ．必要ならば，△AGHの面積Sについて

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}})^2}$$

が成り立つことを用いてよい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $a<0$，$b>0$，$c>0$とし，座標平面上の二つの放物線

$$C_1: y=ax(x-2),\quad C_2: y=b(x+c)^2$$

を考える．放物線C_1上の点$(2,\ 0)$における接線の傾きは-2である．放物線C_1と放物線C_2の共有点が1点のみであるとし，その共有点のx座標をdとする．次の問いに答えよ．

(1) aの値を求めよ．

(2) b，dをcを用いて表せ．

(3) 放物線C_1とx軸で囲まれた部分をAとし，不等式$0\leqq x\leqq d$の表す領域をBとする．AとBの共通部分の面積Sをcを用いて表せ．

(4) 放物線C_2，x軸およびy軸で囲まれた部分の面積Tをcを用いて表せ．

(5) (3)のSと(4)のTが$8S=15T$を満たすとき，cの値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 1 種類の数だけが取り出される確率であるから

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_1}{N^4} = \boldsymbol{\frac{1}{N^3}}$$

(2) 4 種類の数が取り出される確率であるから

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_4 \cdot 4!}{N^4} = \boldsymbol{\frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{N^3}}$$

(3) $\{A,\ A,\ A,\ B\}$ のとなる A, B の選び方は ${}_N\mathrm{P}_2$ 通りあり，これらが取り出される順序は 4 通りあるから，求める確率は

$$\frac{{}_N\mathrm{P}_2 \cdot 4}{N^4} = \boldsymbol{\frac{4(N-1)}{N^3}}$$

(4) 3 種類の数が取り出される確率であるから

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_3\{3^4 - {}_3\mathrm{C}_2(2^4-2) - {}_3\mathrm{C}_1\}}{N^4} = \boldsymbol{\frac{6(N-1)(N-2)}{N^3}}$$

補足 2 種類の数が取り出される確率は [1]

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_2(2^4-2)}{N^4} = \boldsymbol{\frac{7(N-1)}{N^3}}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2013.pdf $\boxed{1}$ (2)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_3 = a + 2d = 18$，$S_2 = a + (a + d) = 2a + d = 18$ より　$\boldsymbol{a = d = 6}$

(2) (1) の結果から　$a_n = 6 + (n - 1)\cdot 6 = 6n$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 6k = 6\cdot\frac{1}{2}n(n+1) = \boldsymbol{3n(n+1)}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} 3k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\{(k+2) - (k-1)\} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} = n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} U_n &= T_n - 4S_n + 5a_n \qquad (*) \\ &= n(n+1)(n+2) - 4\cdot 3n(n+1) + 5\cdot 6n \\ &= n\{(n+1)(n+2) - 12(n+1) + 30\} \\ &= n(n-4)(n-5) \end{aligned}$$

$(*)$ より，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} U_n - U_{n-1} &= (T_n - T_{n-1}) - 4(S_n - S_{n-1}) + 5(a_n - a_{n-1}) \\ &= S_n - 4a_n + 5\cdot 6 \\ &= 3n(n+1) - 4\cdot 6n + 30 \\ &= 3(n-2)(n-5) \end{aligned}$$

したがって　$U_1 = U_2 > U_3 > U_4 = U_5 < U_6 < \cdots$

よって　U_n が最小となるのは　$\boldsymbol{n = 4,\ 5}$ のとき　$\boldsymbol{U_4 = U_5 = 0}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)\}$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$U_n = T_n - 4S_n + 5a_n$ より

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} T_k - 4T_n + 5S_n$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - 4n(n+1)(n+2) + 5\cdot 3n(n+1)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2 - 11n + 34)$$

したがって　$\displaystyle V = \sum_{k=1}^{7} U_k = \frac{1}{4}\cdot 7\cdot 8(7^2 - 11\cdot 7 + 34) = 84$

$f(x) = 3x^2 + cx + 36$ より

$$\int_0^c f(x)\,dx = \int_0^c (3x^2 + cx + 36)dx$$

$$= \left[\, x^3 + \frac{cx^2}{2} + 36x \,\right]_0^c = \frac{3}{2}c^3 + 36c$$

$\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx = V$ であるから

$$\frac{3}{2}c^3 + 36c = 87 \quad \text{ゆえに} \quad (c-2)(c^2 + 2c + 28) = 0$$

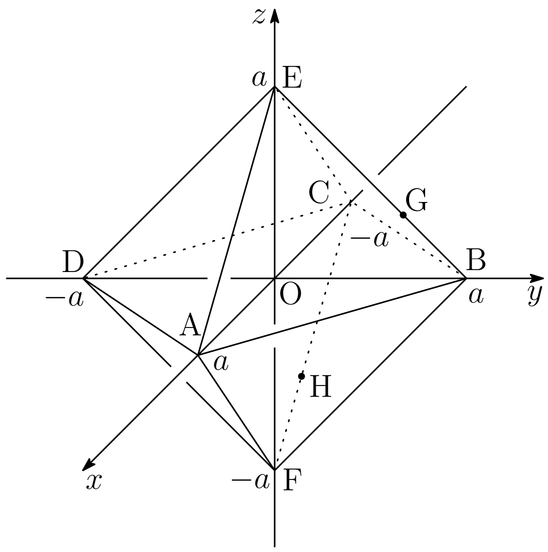
c は実数であるから　$\boldsymbol{c = 2}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおく．

O を原点とする座標空間に 6 点

$\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$,　$\mathrm{B}(0,\ a,\ 0)$,
$\mathrm{C}(-a,\ 0,\ 0)$,　$\mathrm{D}(0, -a,\ 0)$,
$\mathrm{E}(0,\ 0,\ a)$,　$\mathrm{F}(0,\ 0, -a)$

をとると



$$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-a,\ a,\ 0),$$
$$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (-a, -a,\ 0),$$
$$\vec{e} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} = (-a,\ 0,\ a)$$

したがって　$\vec{b}\cdot\vec{d} = \mathbf{0}$,　$\vec{b}\cdot\vec{e} = a^2 = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$,　$\vec{d}\cdot\vec{e} = a^2 = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = (-a,\ 0, -a)$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = p\vec{b} + q\vec{d} + r\vec{e}$ より

$$(-a,\ 0, -a) = p(-a,\ a,\ 0) + q(-a, -a,\ 0) + r(-a,\ 0,\ a)$$
$$a(-1,\ 0, -1) = a(-p-q-r,\ p-q,\ r)$$

したがって　$-p-q-r = -1$,　$p-q = 0$,　$r = -1$

これを解いて　$\boldsymbol{p = 1,\ q = 1,\ r = -1}$

(3) G は辺 BE を $1:2$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{2}{3}(0,\ a,\ 0) + \frac{1}{3}(0,\ 0,\ a) = \frac{a}{3}(0,\ 2,\ 1)$$

H は辺 CF を $t : 1-t$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OF}} = (1-t)(-a,\ 0,\ 0) + t(0,\ 0, -a)$$
$$= a(t-1,\ 0, -t)$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AG}} &= \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= \frac{a}{3}(0,\ 2,\ 1) - a(1,\ 0,\ 0) = \frac{a}{3}(-3,\ 2,\ 1) \\
\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= a(t-1,\ 0, -t) - a(1,\ 0,\ 0) = a(t-2,\ 0, -t) \\
|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2 &= \frac{a^2}{9}(9+4+1) = \frac{7}{9} \\
|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 &= a^2\{(t-2)^2 + t^2\} = t^2 - 2t + 2 \\
\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \frac{a^2}{3}\{-3(t-2) + 2\cdot 0 + 1\cdot(-t)\} = \frac{1}{3}(3-2t)
\end{aligned}
$$

△AGH の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}})^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{9}(t^2-2t+2) - \frac{1}{9}(3-2t)^2} \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{7(t^2-2t+2) - (3-2t)^2} \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{3t^2-2t+5} \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}}
\end{aligned}
$$

$0 < t < 1$ より，$\boldsymbol{t = \frac{1}{3}}$ のとき，S は最小値 $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{14}{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{42}}{18}}$ をとる． ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $y = ax(x-2)$ を微分すると　$y' = 2a(x-1)$

$x = 2$ のとき，$y' = -2$ であるから

$$2a = -2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = -1}$$

(2) $C_1 : y = -x(x-2)$，$C_2 : y = b(x+c)^2$ の方程式から y を消去すると

$$-x(x-2) = b(x+c)^2$$

整理すると　$(b+1)x^2 + 2(bc-1)x + bc^2 = 0$　$(*)$

この方程式 $(*)$ は，重解をもつから

$$D/4 = (bc-1)^2 - (b+1)bc^2 = 0$$

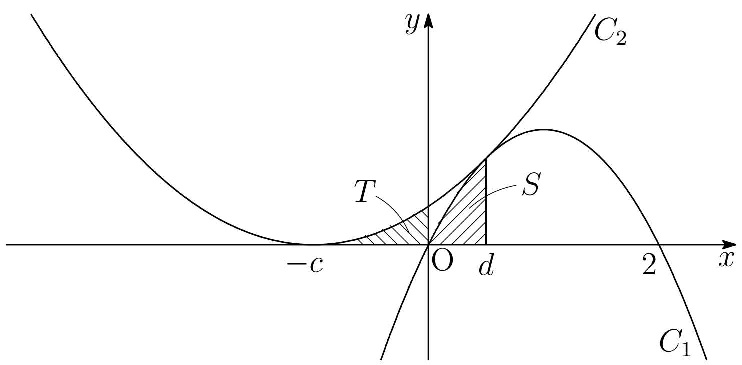
ゆえに　$b(c^2+2c) = 1$　b について解くと　$\boldsymbol{b = \dfrac{1}{c^2+2c}}$

2 次方程式 $(*)$ の重解が d であるから

$$d = -\frac{2(bc-1)}{2(b+1)} = \frac{1-bc}{b+1} = \frac{1-\dfrac{c}{c^2+2c}}{\dfrac{1}{c^2+2c}+1} = \frac{c(c+1)}{(c+1)^2} = \boldsymbol{\frac{c}{c+1}}$$

(3) $c > 0$ より，$0 < d < 1$ であるから

$$S = \int_0^d \{-x(x-2)\}dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^d = \frac{1}{3}d^2(3-d)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{c}{c+1}\right)^2\left(3 - \frac{c}{c+1}\right) = \boldsymbol{\frac{c^2(2c+3)}{3(c+1)^3}}$$



(4) 求める面積 T は

$$T = \int_{-c}^{0} b(x+c)^2\,dx = \left[\ \frac{1}{3}b(x+c)^3\ \right]_{-c}^{0} = \frac{1}{3}bc^3$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{c^2+2c}\cdot c^3 = \boldsymbol{\frac{c^2}{3(c+2)}}$$

(5) $8S = 15T$ に (3)，(4) の結果を代入すると

$$\frac{8c^2(2c+3)}{3(c+1)^2} = \frac{15c^2}{3(c+2)}$$

整理すると　　$15c^3 + 29c^2 - 11c - 33 = 0$

したがって　　$(c-1)(15c^2 + 44c + 33) = 0$

$c > 0$ であるから　　$\boldsymbol{c = 1}$　　■