令和４年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・経済 (昼)・歯 (口腔健康科学 (口腔保健))

問題 1 2 3 4

1 正の整数 N に対し，N を 7 進法で表したときの数字の並びを 10 進法で表された数だと思って読み取った数を M とする．たとえば，$N=7$ のとき，N は 7 進法で $10_{(7)}$ と表されるので $M=10$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $M=100$ のとき N の値を求めよ．また，$N=100$ のとき M の値を求めよ．

(2) N は 7 進法では 3 桁で表され，10 進法では 2 桁で表されるとする．$2N=M$ が成り立つとき，N の値を求めよ．

(3) 7 進法で 3 桁で表される N のうちで，$2N=M$ が成り立つ最大のものを求めよ．

(4) N は 7 進法で 4 桁で表されるとする．このとき，$2N<M$ となることを示せ．

2 a を正の実数，t を $0<t<1$ を満たす実数とする．座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円を S とし，その中心が $\mathrm{I}(0,\ t)$ であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\angle\mathrm{IBC}$ を θ とおく．t と a を，それぞれ θ を用いて表せ．

(2) a を t を用いて表せ．

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心が内接円 S の周上にあるとき，t の値を求めよ．

(4) $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心が S の周上にあるとき，t の値を求めよ．ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下した 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られており，その交わる点を三角形の垂心と呼ぶ．

(5) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心が S の周上にあるとき，t のとり得る値をすべて求めよ．

3 n を自然数とする．袋の中に赤玉が 3 個，白玉が $(n+5)$ 個，合計で $(n+8)$ 個の玉が入っている．また，空箱 A，B，C，D，E，F が用意されている．この準備の下で次の試行 1，試行 2 を順に行う．

試行 1 袋から玉を 1 個取り出して，箱 A に入れる．箱 A に入れた玉が白玉なら $i=0$，赤玉なら $i=1$ とおく．

試行 2 次に，袋から白玉を n 個取り出して，箱 B に入れる．この時点で，袋に残った玉 7 個のうち，赤玉は $(3-i)$ 個，白玉は $(4+i)$ 個である．この 7 個の中から 2 個の玉を取り出して，箱 C に入れる．

試行 2 を終えたら，箱 A と箱 C の玉の色を記録して，箱 A，B，C の玉をすべて元通りに袋に戻す．そして次の試行 3 を行う．

試行 3 袋から玉を 1 個取り出して，箱 D に入れる．次に，袋から玉を n 個取り出して，箱 E に入れる．最後に袋から玉を 2 個取り出して，箱 F に入れる．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $i=0$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_0 を求めよ．また，$i=1$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_1 を求めよ．

(2) 試行 1 において，箱 A に赤玉が入る確率 q_{A} を n を用いて表せ．また，試行 1，試行 2 を順に行うとき，箱 C に赤玉が 2 個入る確率 q_{C} を n を用いて表せ．

(3) 試行 3 において，箱 D に赤玉が入るという事象を事象 X，箱 E に入る玉がすべて白であるという事象を事象 Y，箱 F に赤玉が 2 個入るという事象を事象 Z と呼ぶことにする．事象 X と事象 Y がともに起こる確率 $P(X\cap Y)$ を n を用いて表せ．また，事象 Y と事象 Z がともに起こる確率 $P(Y\cap Z)$ を n を用いて表せ．

(4) (3) の事象 Y が起こったとき，(3) の事象 X が起こる条件付き確率 $P_Y(X)$ と，(3) の事象 Z が起こる条件付き確率 $P_Y(Z)$ をそれぞれ求めよ．

4 実数 a に対して，座標平面上の点 $(a,\ 0)$ を通る傾き $4a$ の直線を L_a とする．a が実数全体を動くとき，直線 L_a が通り得る点全体からなる領域を S とする．また，2 点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$ と $\mathrm{Q}(0,\ 2)$ に対し，$\sqrt{2}\mathrm{AP} \leqq \mathrm{AQ}$ を満たす点 A 全体からなる領域を T とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 領域 S を図示せよ．

(2) 領域 T を図示せよ．

(3) S と T の共通部分の面積を求めよ．

解答例

1 (1) $M=100$ のとき　$N=100_{(7)}=1{\cdot}7^2+0{\cdot}7^1+0=\mathbf{49}$

$N=100=2{\cdot}7^2+0{\cdot}7^1+2=202_{(7)}$ のとき　$M=\mathbf{202}$

(2) $N=abc_{(7)}=a{\cdot}7^2+b{\cdot}7^1+c$ とおくと　$M=a{\cdot}10^2+b{\cdot}10+c$

N は10進法では2桁であるから　$N\leqq 201_{(7)}$　$\cdots$①

$2N=M$ であるから

$$2(a{\cdot}7^2+b{\cdot}7^1+c)=a{\cdot}10^2+b{\cdot}10+c \quad \text{ゆえに} \quad c=2(a-2b) \qquad (*)$$

$a=1,2$ で，$b,\ c$ は0以上6以下の整数である．

$a=2$ のとき，① より条件を満たす $(a,\ b,\ c)$ は存在しない．

したがって　$a=1$ のとき　$b=0,\ c=2$　よって　$N=102_{(7)}=\mathbf{51}$

(3) $N=xyz_{(7)}$ とする (x は6以下の自然数，$y,\ z$ は0以上6以下の整数)

$2N=M$ のとき，$(*)$ と同様に　$z=2(x-2y)$

最大の N は，$x=6,\ y=3,\ z=0$ のときであるから

$$N=630_{(7)}=6{\cdot}7^2+3{\cdot}7+0=\mathbf{315}$$

(4) $N=pqrs_{(7)}=p{\cdot}7^3+q{\cdot}7^2+r{\cdot}7+s$ とおくと
(p は6以下の自然数，$q,\ r,\ s$ は0以上6以下の整数)

$$M=p{\cdot}10^3+q{\cdot}10^2+r{\cdot}10+s$$

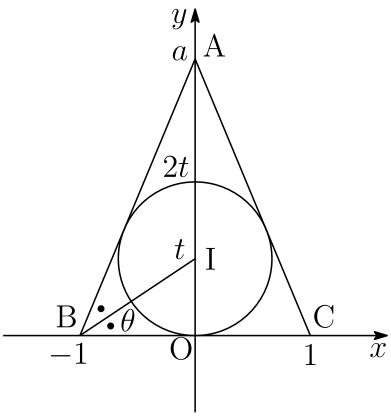
このとき

$$\begin{aligned}M-2N&=(1000p+100q+10r+s)-2(343p+49q+7r+s)\\&=314p+2q-4r-s\\&=314(p-1)+2q+4(6-r)+(6-s)+284>0\end{aligned}$$

よって　$2N<M$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 右の図から

$$\boldsymbol{t = \tan\theta,\quad a = \tan 2\theta}$$



(2) (1) の結果より

$$a = \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \boldsymbol{\frac{2t}{1-t^2}}$$

(3) △ABC の重心の座標は $\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$

これが円周上の点 $(0,\ 2t)$ と一致するから

$$\frac{a}{3} = 2t \quad \text{ゆえに} \quad a = 6t$$

これに (2) の結果を代入すると

$$\frac{2t}{1-t^2} = 6t \quad \text{ゆえに} \quad t(3t^2-2) = 0$$

$0 < t < 1$ に注意して $\boldsymbol{t = \dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

(4) 点 $\mathrm{B}(-1,\ 0)$ を通り，直線 AC に垂直な直線の方程式は

$$y = \frac{1}{a}(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{x}{a} + \frac{1}{a}$$

この直線と y 軸との交点 $\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$ が，$(0,\ 2t)$ と一致するから

$$\frac{1}{a} = 2t$$

これに (2) の結果を代入すると $(0 < t < 1)$

$$\frac{1-t^2}{2t} = 2t \quad \text{ゆえに} \quad 5t^2 = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

(5) AC の垂直二等分線，すなわち，AC の中点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$ を通り，傾き $\dfrac{1}{a}$ の直線の方程式は

$$y - \frac{a}{2} = \frac{1}{a}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{x}{a} + \frac{a}{2} - \frac{1}{2a}$$

この直線と y 軸との交点 $\left(0,\ \dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{2a}\right)$ が，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ または $(0,\ 2t)$ に一致するときである．

(i) $\dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{2a} = 0$ のとき $(a > 0)$

$$a^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = 1$$

これに (2) の結果を代入すると $\quad \dfrac{2t}{1-t^2} = 1$

$$t^2 + 2t - 1 = 0 \quad t \text{ の値の範囲に注意して} \quad t = -1 + \sqrt{2}$$

(ii) $\dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{2a} = 2t$ のとき，これに (2) の結果を代入すると

$$\frac{t}{1-t^2} - \frac{1-t^2}{4t} = 2t \quad \text{整理すると} \quad 7t^4 - 2t^2 - 1 = 0$$

したがって $\quad t^2 = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{7} \quad t$ の範囲に注意して $\quad t = \sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}}$

(i)，(ii) より $\quad \boldsymbol{t = -1 + \sqrt{2},\ \sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 条件付き確率 p_0 は，赤玉 3 個，白玉 4 個の計 7 個から 2 個取り出し，2 個とも赤玉の確率であるから

$$p_0 = \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{3}{21} = \boldsymbol{\frac{1}{7}}$$

条件付き確率 p_1 は，赤玉 2 個，白玉 5 個の計 7 個から 2 個取り出し，2 個とも赤玉の確率であるから

$$p_1 = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{1}{21}}$$

(2) $q_\mathrm{A} = \boldsymbol{\frac{3}{n+8}}$

箱 A に白玉が入る確率を $\overline{q_\mathrm{A}}$ とすると　$\overline{q_\mathrm{A}} = 1 - q_\mathrm{A} = \frac{n+5}{n+8}$

$$\begin{aligned} q_\mathrm{C} &= \overline{q_\mathrm{A}}p_0 + q_\mathrm{A}p_1 \\ &= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{3}{n+8}\cdot\frac{1}{21} = \boldsymbol{\frac{n+6}{7(n+8)}} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} P(X\cap Y) &= \frac{3}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+5}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n} = \frac{3}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+5}\mathrm{C}_5}{{}_{n+7}\mathrm{C}_7} = \frac{3}{n+8}\cdot\frac{(n+5)!}{n!5!}\cdot\frac{n!7!}{(n+7)!} \\ &= \frac{3}{n+8}\cdot\frac{7\cdot6}{(n+7)(n+6)} = \boldsymbol{\frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X\cap Y\cap Z) &= \frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)}\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{6}{(n+8)(n+7)(n+6)}, \\ P(\overline{X}\cap Y\cap Z) &= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_4}{{}_{n+7}\mathrm{C}_7}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} \\ &= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{(n+4)!}{n!4!}\cdot\frac{n!7!}{(n+7)!}\cdot\frac{1}{7} = \frac{30}{(n+8)(n+7)(n+6)} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} P(Y\cap Z) &= P(X\cap Y\cap Z) + P(\overline{X}\cap Y\cap Z) \\ &= \frac{6}{(n+8)(n+7)(n+6)} + \frac{30}{(n+8)(n+7)(n+6)} \\ &= \boldsymbol{\frac{36}{(n+8)(n+7)(n+6)}} \end{aligned}$$

(4)

$$P(\overline{X} \cap Y) = \frac{n+5}{n+8} \cdot \frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n} = \frac{n+5}{n+8} \cdot \frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_4}{{}_{n+7}\mathrm{C}_7}$$
$$= \frac{n+5}{n+8} \cdot \frac{(n+4)!}{n!4!} \cdot \frac{n!7!}{(n+7)!} = \frac{210}{(n+8)(n+7)(n+6)}$$

上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned} P(Y) &= P(X \cap Y) + P(\overline{X} \cap Y) \\ &= \frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)} + \frac{210}{(n+8)(n+7)(n+6)} \\ &= \frac{336}{(n+8)(n+7)(n+6)} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} P_Y(X) &= \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \\ &= \frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)} \cdot \frac{(n+8)(n+7)(n+6)}{336} = \boldsymbol{\frac{3}{8}}, \\ P_Y(Z) &= \frac{P(Y \cap Z)}{P(Y)} \\ &= \frac{36}{(n+8)(n+7)(n+6)} \cdot \frac{(n+8)(n+7)(n+6)}{336} = \boldsymbol{\frac{3}{28}} \end{aligned}$$

■

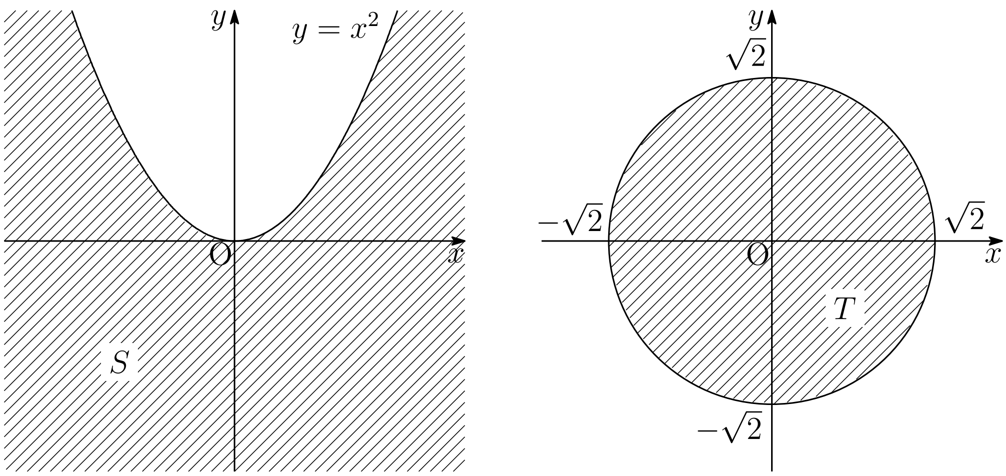
4 (1) 点 $(a,\ 0)$ を通り，傾き $4a$ の直線 L_a の方程式は

$$y = 4a(x-a)$$

これを a について整理すると　$a^2 - 4xa + y = 0$　$\cdots(*)$
a に関する 2 次方程式 $(*)$ が，実数解をもつから，係数について

$$D/4 = (-2x)^2 - 4y \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad y \leqq x^2$$

この不等式が表す領域 S は左下の図の斜線部分で境界線を含む.

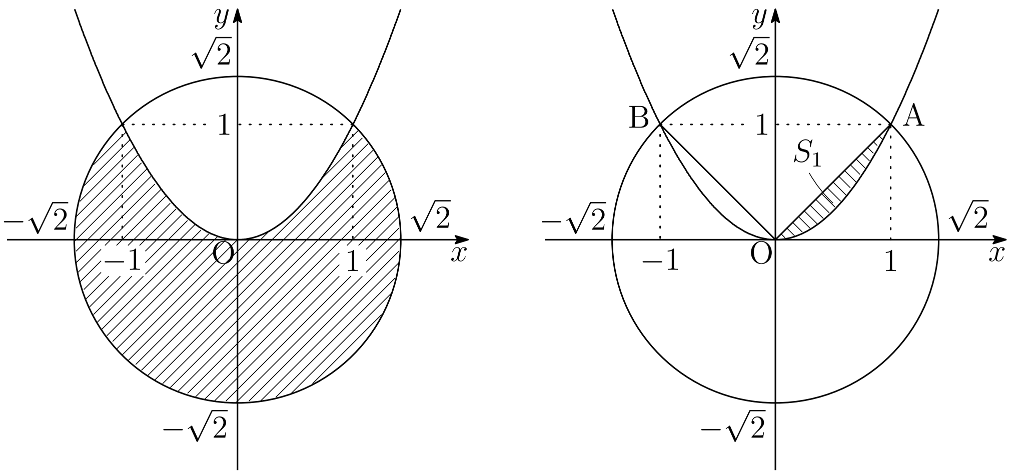


(2) $\sqrt{2}\mathrm{AP} \leqq \mathrm{AQ}$ より　$2\mathrm{AP}^2 \leqq \mathrm{AQ}^2$
P$(0,\ 1)$，Q$(0,\ 2)$ より，A$(x,\ y)$ の満たす不等式は

$$2\{x^2 + (y-1)^2\} \leqq x^2 + (y-2)^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + y^2 \leqq 2$$

この不等式が表す領域 T は右上の図の斜線部分で境界線を含む.

(3) S と T の共通部分は，左下の図の斜線部分で境界線を含む．



放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\,\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

右上の図の原点 O を中心とする点 $(0, -\sqrt{2})$ を含む $\overparen{\mathrm{AB}}$ の扇形の面積は

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

よって，求める面積を S とすると

$$S = \frac{3\pi}{2} - 2S_1 = \boldsymbol{\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{3}}$$

■