

令和3年度 広島大学 2次試験前期日程 (数学問題)120分
 教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・
 経済 (昼)・歯 (航空健康科学 (口腔保健))

- 1 a を実数とする. 関数 $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax$ が $x = a$ で極大値をとるとき, 次の問いに答えよ.

- (1) a の満たす条件を求めよ.
 (2) 次の不等式を解け.

$$|x+1| + |x-2| \leq 4$$

- (3) x が (2) の範囲を動くとき, $f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ.

- 2 座標平面において, 二つの放物線

$$y = x^2, \quad y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$$

上にそれぞれ点 $A(1, 1)$, 点 $C(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ をとる. 次の問いに答えよ.

- (1) 放物線 $y = x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり, \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{CB} は垂直であるとする. このとき, B の座標を求めよ.
 (2) 放物線 $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり, \overrightarrow{AD} と \overrightarrow{CD} は垂直であるとする. このとき, D の座標を求めよ.
 (3) B, D はそれぞれ (1), (2) で定めたものとする. このとき, 四角形 $ABCD$ が正方形であることを示せ.

- 3 1個のさいころを3回投げる. 1回目に出た目の数を a , 2回目に出た目の数を b , 3回目に出た目の数を c とする. また,

$$f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$$

とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $b^2 > 4c$ である確率を求めよ.
 (2) 2次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつ確率を求めよ.
 (3) 2次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき, $f'(1) = 1$ である条件付き確率を求めよ.

4 次の問いに答えよ.

- (1) $A = \sin x$ とおく. $\sin 5x$ を A の整式で表せ.
- (2) $\sin^2 \frac{\pi}{5}$ の値を求めよ.
- (3) 曲線 $y = \cos 3x$ ($x \geq 0$) と曲線 $y = \cos 7x$ ($x \geq 0$) の共有点の x 座標を小さい方から順に x_1, x_2, x_3, \dots とする. このとき, 関数

$$y = \cos 3x \quad (x_5 \leq x \leq x_6)$$

の値域を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax \text{ より}$$

$$f'(x) = -2x^2 + (2a+1)x - a = -(2x-1)(x-a)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \frac{1}{2}, a$$

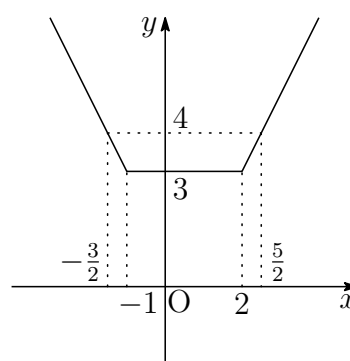
$$x = a \text{ で極大となるから, } f(x) \text{ の増減により } \frac{1}{2} < a$$

$$(2) \quad y = |x+1| + |x-2| \text{ とすると}$$

$$y = \begin{cases} -2x+1 & (x \leq -1) \\ 3 & (-1 \leq x \leq 2) \\ 2x-1 & (2 \leq x) \end{cases}$$

グラフから, $|x+1| + |x-2| \leq 4$ の解は

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$



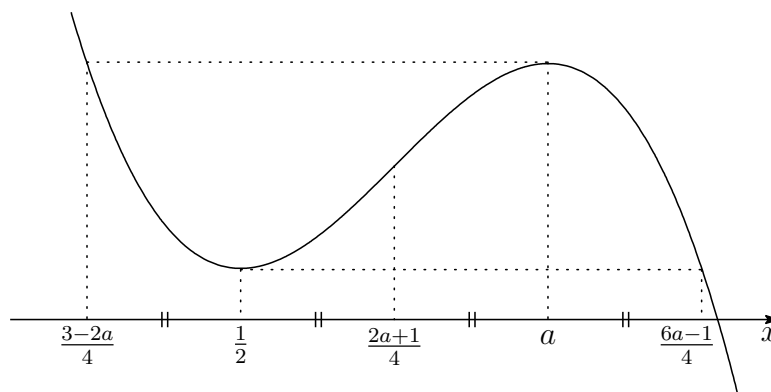
$$(3) \quad x = \frac{1}{2} \text{ は定義域 } -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \text{ の中央であるから, } f(x) \text{ の最大値は}$$

$$\max \left(f\left(-\frac{3}{2}\right), f\left(\frac{5}{2}\right) \right) = \max \left(\frac{15}{4}a + \frac{27}{8}, \frac{15}{4}a - \frac{175}{24} \right) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{24} = f\left(\frac{6a-1}{4}\right) \text{ であるから}$$

$$\frac{5}{2} < \frac{6a-1}{4} \quad \text{すなわち} \quad a > \frac{11}{6} \text{ のとき} \quad \text{最小値} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{24}$$

$$\frac{6a-1}{4} \leq \frac{5}{2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2} < a \leq \frac{11}{6} \text{ のとき} \quad \text{最小値} \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}a - \frac{175}{24}$$



補足 $x = \frac{1}{2}$ で極小, $x = a$ で極大となるから, その中央 $x = \frac{2a+1}{4}$ が変曲点の x 座標となる. ここで, 等差数列

$$\frac{3-2a}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2a+1}{4}, a, \frac{6a-1}{4}$$

をとると, 次式が成立する¹.

$$f\left(\frac{3-2a}{4}\right) = f(a), \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{6a-1}{4}\right)$$

$x = \frac{1}{2}$ を極として, $f(x)$ を展開すると

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \\ &= f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2a-1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

$d > 0$ とし, $x = \frac{1}{2} - d$, $x = \frac{1}{2} + d$ に対する $f(x)$ を求めると

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2} - d\right) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2a-1}{2}d^2 + \frac{2}{3}d^3 \\ f\left(\frac{1}{2} + d\right) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2a-1}{2}d^2 - \frac{2}{3}d^3 \end{aligned}$$

上の2式から $f\left(\frac{1}{2} - d\right) > f\left(\frac{1}{2} + d\right)$

特に, $d = 2$ とすると $f\left(-\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right)$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TSDai/TSDai_2017.pdf (p.6 を参照)

- 2 (1) A(1, 1) と異なる点 B の座標を (b, b^2) とすると $(b \neq 1)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b-1 \\ b^2-1 \end{pmatrix} = (b-1) \begin{pmatrix} 1 \\ b+1 \end{pmatrix}$$

また, $C(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$, $B(b, b^2)$ より

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} b-\sqrt{2}+1 \\ b^2-\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB}$ より, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ であるから

$$\begin{aligned} 1 \cdot (b-\sqrt{2}+1) + (b+1)(b^2-\sqrt{2}-1) &= 0 \\ b^3 + b^2 - \sqrt{2}b - 2\sqrt{2} &= 0 \\ (b-\sqrt{2})\{b^2 + (\sqrt{2}+1)b + 2\} &= 0 \\ (b-\sqrt{2}) \left\{ \left(b + \frac{\sqrt{2}+1}{2} \right)^2 + \frac{5-2\sqrt{2}}{4} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

したがって $b = \sqrt{2}$ よって $B(\sqrt{2}, 2)$

- (2) 点 $C(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ と異なる点 D の座標を $(d, -\sqrt{2}d^2 + 3d + \sqrt{2})$ とすると $(d \neq \sqrt{2}-1)$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} d-\sqrt{2}+1 \\ -\sqrt{2}d^2+3d-1 \end{pmatrix} = (d-\sqrt{2}+1) \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}d+\sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

また, $A(1, 1)$, $D(d, -\sqrt{2}d^2 + 3d + \sqrt{2})$ より

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} d-1 \\ -\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CD}$ より, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ であるから

$$\begin{aligned} 1 \cdot (d-1) + (-\sqrt{2}d+\sqrt{2}+1)(-\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2}-1) &= 0 \\ 2d^3 - (2+4\sqrt{2})d^2 + (2+4\sqrt{2})d &= 0 \\ d\{d^2 - (1+2\sqrt{2})d + (1+2\sqrt{2})\} &= 0 \\ d \left\{ \left(d - \frac{1+2\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{4\sqrt{2}-5}{4} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

したがって $d = 0$ よって $D(0, \sqrt{2})$

(3) (1), (2) の結果から

$$\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2} - 1, 1), \quad \overrightarrow{AD} = (-1, \sqrt{2} - 1)$$

\overrightarrow{AD} は \overrightarrow{AB} を $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したもので、すなわち、点 B を点 A を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させたものが D である。また $\overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{2} - 1)$ より

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

よって、四角形 ABCD は正方形である。

補足 放物線 $C: y = f(x)$ 上の 2 点 $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ を通る直線は C 上の $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ における接線と平行である。

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とすると

$$f'(x) = 2ax + b$$

であるから

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

本題の放物線について、 $f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ とすると

$$f'(x) = -2\sqrt{2}x + 3$$

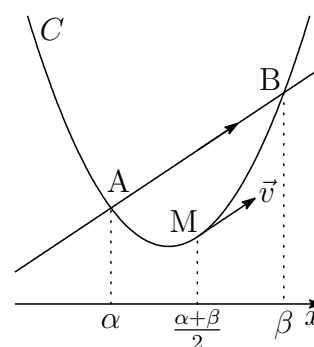
2 点 $C(\sqrt{2} - 1, f(\sqrt{2} - 1))$, $D(d, f(d))$ を通る直線の傾きは

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\sqrt{2} - 1 + d}{2}\right) &= -2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1 + d}{2} + 3 \\ &= -\sqrt{2}d + \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

3 (1) $b^2 > 4c$ より $c < \frac{1}{4}b^2$ これを満たす (b, c) の組は、次の 17 組

- $b = 1, 2$ のとき c はなし
- $b = 3$ のとき $c = 1, 2$
- $b = 4$ のとき $c = 1, 2, 3$
- $b = 5, 6$ のとき $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

よって、求める確率は $\frac{17}{6^2} = \frac{17}{36}$



(2) (i) $a = 1, 3, 5$ のとき, $f(x) = -x^2 + bx + c$ であるから, 係数について

$$D = b^2 + 4c > 0$$

このとき, つねに異なる 2 つの実数解をもつ.

(ii) $a = 2, 4, 6$ のとき, $f(x) = x^2 + bx + c$ であるから, $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつ条件は

$$b^2 - 4c > 0 \quad \text{すなわち} \quad b^2 > 4c$$

よって, 求める確率は, (i),(ii) および (1) の結果から

$$\frac{3}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{17}{36} = \frac{53}{72}$$

(3) まず, 2 つの事象を次のように定める.

A : 「2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつ」

B : 「 $f'(1) = 1$ である」

(2) の結果から $P(A) = \frac{53}{72}$

$f'(x) = 2(-1)^a x + b$ より, $f'(1) = 1$ のとき

$$2(-1)^a + b = 1$$

これを満たす (a, b) は, 次の 3 組

$$(a, b) = (1, 3), (3, 3), (5, 3)$$

(i) より $B \implies A$ ゆえに $P(B) = P(A \cap B) = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$

よって, 求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{53}{72}} = \frac{6}{53}$$

4 (1) $\sin 5x = \sin(4x + x) = \sin 4x \cos x + \cos 4x \sin x$ であるから

$$\begin{aligned}\sin 4x &= 2 \sin 2x \cos 2x = 2 \cdot 2 \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x) \\ &= 4(\sin x - 2 \sin^3 x) \cos x \\ \cos 4x &= 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2(2 \sin x \cos x)^2 \\ &= 1 - 8 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) = 8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x + 1\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sin 5x &= 4(\sin x - 2 \sin^3 x) \cos x \cos x + (8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x + 1) \sin x \\ &= 4(2 \sin^3 x - \sin x)(\sin^2 x - 1) + 8 \sin^5 x - 8 \sin^3 x + \sin x \\ &= 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x \\ &= \mathbf{16A^5 - 20A^3 + 5A}\end{aligned}$$

(2) $x = \frac{\pi}{5}$ とおくと $A = \sin \frac{\pi}{5}$, $\sin 5x = 0$
これらを (1) の結果に代入すると

$$16A^5 - 20A^3 + 5A = 0$$

$A \neq 0$ であるから $16A^4 - 20A^2 + 5 = 0$

A^2 について解くと $A^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$

$A^2 = \sin^2 \frac{\pi}{5} < \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ であるから

$$\sin^2 \frac{\pi}{5} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

(3) $\cos 3x - \cos 7x = 2 \sin 5x \sin 2x$ より, $\cos 3x = \cos 7x$ の解は

$$x = \frac{m\pi}{5}, \quad x = \frac{n\pi}{2} \quad (m, n \text{ は整数})$$

$y = \cos 3x$ ($x \geq 0$) と $y = \cos 7x$ ($x \geq 0$) の共有点の x 座標は小さい順に

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{5}, \quad x_3 = \frac{2\pi}{5}, \quad x_4 = \frac{\pi}{2}, \quad x_5 = \frac{3\pi}{5}, \quad x_6 = \frac{4\pi}{5}, \quad \dots$$

$$x_5 = \frac{3\pi}{5}, x_6 = \frac{4\pi}{5}, x_5 \leq x \leq x_6 \text{ より}$$

$$\frac{9\pi}{5} \leq 3x \leq \frac{12\pi}{5} \quad \text{ゆえに} \quad 2\pi - \frac{\pi}{5} \leq 3x \leq 2\pi + \frac{2\pi}{5}$$

これから、関数 $y = \cos 3x$ ($x_5 \leq x \leq x_6$) の値域は

$$\cos \frac{2\pi}{5} \leq y \leq \cos 0$$

ここで、(2)の結果より

$$\cos \frac{2\pi}{5} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{5} = 1 - 2 \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

よって、求める値域は $\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \leq y \leq 1$