令和３年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・経済 (昼)・歯 (口腔健康科学 (口腔保健))

問題 1 2 3 4

1 a を実数とする．関数 $f(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2a+1}{2}x^2 - ax$ が $x = a$ で極大値をとるとき，次の問いに答えよ．

(1) a の満たす条件を求めよ．

(2) 次の不等式を解け．

$$|x+1| + |x-2| \leqq 4$$

(3) x が (2) の範囲を動くとき，$f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ．

2 座標平面において，二つの放物線

$$y = x^2, \quad y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$$

上にそれぞれ点 A(1, 1)，点 C$(\sqrt{2-1},\ \sqrt{2}+1)$ をとる．次の問いに答えよ．

(1) 放物線 $y = x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ は垂直であるとする．このとき，B の座標を求めよ．

(2) 放物線 $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は垂直であるとする．このとき，D の座標を求めよ．

(3) B，D はそれぞれ (1)，(2) で定めたものとする．このとき，四角形 ABCD が正方形であることを示せ．

3 1 個のさいころを 3 回投げる．1 回目に出た目の数を a，2 回目に出た目の数を b，3 回目に出た目の数を c とする．また，

$$f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) $b^2 > 4c$ である確率を求めよ．

(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつ確率を求めよ．

(3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき，$f'(1) = 1$ である条件付き確率を求めよ．

4 次の問いに答えよ．

(1) $A = \sin x$ とおく．$\sin 5x$ を A の整式で表せ．

(2) $\sin^2 \dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ．

(3) 曲線 $y = \cos 3x$ $(x \geqq 0)$ と曲線 $y = \cos 7x$ $(x \geqq 0)$ の共有点の x 座標を小さい方から順に x_1，x_2，x_3，$\cdots$ とする．このとき，関数

$$y = \cos 3x \quad (x_5 \leqq x \leqq x_6)$$

の値域を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2a+1}{2}x^2 - ax$ より

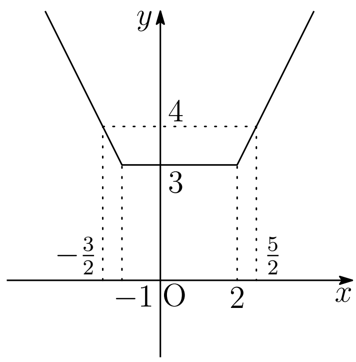
$$f'(x) = -2x^2 + (2a+1)x - a = -(2x-1)(x-a)$$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = \dfrac{1}{2},\ a$

$x = a$ で極大となるから，$f(x)$ の増減により　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2} < a}$

(2) $y = |x+1| + |x-2|$ とすると

$$y = \begin{cases} -2x+1 & (x \leqq -1) \\ 3 & (-1 \leqq x \leqq 2) \\ 2x-1 & (2 \leqq x) \end{cases}$$



グラフから，$|x+1| + |x-2| \leqq 4$ の解は

$$\boldsymbol{-\frac{3}{2} \leqq x \leqq \frac{5}{2}}$$

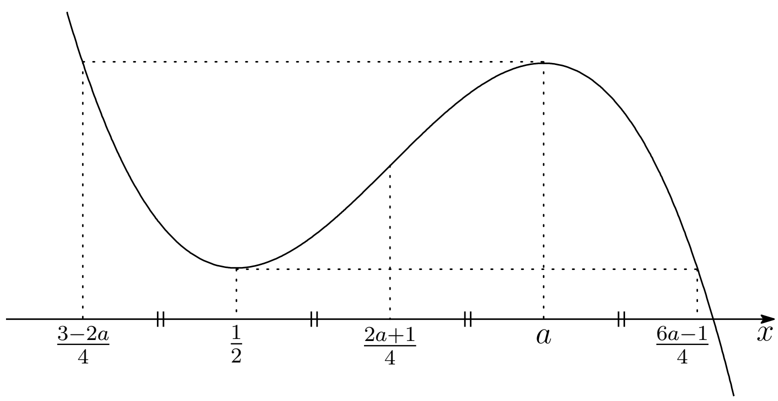
(3) $x = \dfrac{1}{2}$ は定義域 $-\dfrac{3}{2} \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}$ の中央であるから，$f(x)$ の最大値は

$$\max\left(f\left(-\frac{3}{2}\right),\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right) = \max\left(\frac{15}{4}a + \frac{27}{8},\ \frac{15}{4}a - \frac{175}{24}\right) = \boldsymbol{\frac{15}{4}a + \frac{27}{8}}$$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{24} = f\left(\dfrac{6a-1}{4}\right)$ であるから

$\dfrac{5}{2} < \dfrac{6a-1}{4}$　すなわち　$\boldsymbol{a > \dfrac{11}{6}}$ のとき　最小値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{24}}$

$\dfrac{6a-1}{4} \leqq \dfrac{5}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2} < a \leqq \dfrac{11}{6}}$ のとき　最小値 $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{15}{4}a - \dfrac{175}{24}}$



補足 $x=\dfrac{1}{2}$ で極小，$x=a$ で極大となるから，その中央 $x=\dfrac{2a+1}{4}$ が変曲点の x 座標となる．ここで，等差数列

$$\frac{3-2a}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{2a+1}{4},\ a,\ \frac{6a-1}{4}$$

をとると，次式が成立する[1]．

$$f\left(\frac{3-2a}{4}\right)=f(a),\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{6a-1}{4}\right)$$

$x=\dfrac{1}{2}$ を極として，$f(x)$ を展開すると

$$\begin{aligned}f(x)&=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\\&=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2a-1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\end{aligned}$$

$d>0$ とし，$x=\dfrac{1}{2}-d$，$x=\dfrac{1}{2}+d$ に対する $f(x)$ を求めると

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2}-d\right)&=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2a-1}{2}d^2+\frac{2}{3}d^3\\f\left(\frac{1}{2}+d\right)&=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2a-1}{2}d^2-\frac{2}{3}d^3\end{aligned}$$

上の 2 式から　$f\left(\dfrac{1}{2}-d\right)>f\left(\dfrac{1}{2}+d\right)$

特に，$d=2$ とすると　$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)>f\left(\dfrac{5}{2}\right)$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TSdai/TSdai_2017.pdf (p.6 を参照)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) A(1, 1) と異なる点 B の座標を $(b,\ b^2)$ とすると $(b \neq 1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b-1 \\ b^2-1 \end{pmatrix} = (b-1)\begin{pmatrix} 1 \\ b+1 \end{pmatrix}$$

また，$\mathrm{C}(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \begin{pmatrix} b-\sqrt{2}+1 \\ b^2-\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ であるから

$$\begin{aligned} 1\cdot(b-\sqrt{2}+1)+(b+1)(b^2-\sqrt{2}-1) &= 0 \\ b^3+b^2-\sqrt{2}b-2\sqrt{2} &= 0 \\ (b-\sqrt{2})\{b^2+(\sqrt{2}+1)b+2\} &= 0 \\ (b-\sqrt{2})\left\{\left(b+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2+\frac{5-2\sqrt{2}}{4}\right\} &= 0 \end{aligned}$$

したがって　$b=\sqrt{2}$　よって　$\mathbf{B(\sqrt{2},\ 2)}$

(2) 点 $\mathrm{C}(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$ と異なる点 D の座標を $(d, -\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2})$ とすると $(d \neq \sqrt{2}-1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} d-\sqrt{2}+1 \\ -\sqrt{2}d^2+3d-1 \end{pmatrix} = (d-\sqrt{2}+1)\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}d+\sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

また，A(1, 1)，$\mathrm{D}(d, -\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2})$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} d-1 \\ -\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ であるから

$$\begin{aligned} 1\cdot(d-1)+(-\sqrt{2}d+\sqrt{2}+1)(-\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2}-1) &= 0 \\ 2d^3-(2+4\sqrt{2})d^2+(2+4\sqrt{2})d &= 0 \\ d\{d^2-(1+2\sqrt{2})d+(1+2\sqrt{2})\} &= 0 \\ d\left\{\left(d-\frac{1+2\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{4\sqrt{2}-5}{4}\right\} &= 0 \end{aligned}$$

したがって　$d=0$　よって　$\mathbf{D(0,\ \sqrt{2})}$

(3) (1)，(2) の結果から

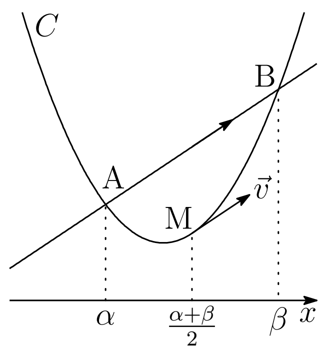
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\sqrt{2}-1,\ 1),\quad \overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-1,\ \sqrt{2}-1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したもの，すなわち，点 B を点 A を中心に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させたものが D である．また　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,\ \sqrt{2}-1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

よって，四角形 ABCD は正方形である．

補足 放物線 $C : y = f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ を通る直線は C 上の $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ における接線と平行である．



$f(x)=ax^2+bx+c$ とすると

$$f'(x)=2ax+b$$

であるから

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

本題の放物線について，$f(x)=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ とすると

$$f'(x)=-2\sqrt{2}x+3$$

2 点 $\mathrm{C}(\sqrt{2}-1, f(\sqrt{2}-1))$，$\mathrm{D}(d,\ f(d))$ を通る直線の傾きは

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\sqrt{2}-1+d}{2}\right) &= -2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}-1+d}{2}+3 \\ &= -\sqrt{2}d+\sqrt{2}+1 \end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $b^2>4c$ より　$c<\dfrac{1}{4}b^2$　これを満たす $(b,\ c)$ の組は，次の 17 組

- $b=1,2$ のとき　c はなし
- $b=3$ のとき　$c=1,2$
- $b=4$ のとき　$c=1,2,3$
- $b=5,6$ のとき　$c=1,2,3,4,5,6$

よって，求める確率は　$\dfrac{17}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{17}{36}}$

(2)　(i) $a=1,3,5$ のとき，$f(x)=-x^2+bx+c$ であるから，係数について

$$D=b^2+4c>0$$

このとき，つねに異なる 2 つの実数解をもつ．

(ii) $a=2,4,6$ のとき，$f(x)=x^2+bx+c$ であるから，$f(x)=0$ が異なる二つの実数解をもつ条件は

$$b^2-4c>0 \quad \text{すなわち} \quad b^2>4c$$

よって，求める確率は，(i),(ii) および (1) の結果から

$$\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{17}{36}=\boldsymbol{\frac{53}{72}}$$

(3) まず，2 つの事象を次のように定める．

A :「2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる二つの実数解をもつ」
B :「$f'(1)=1$ である」

(2) の結果から　$P(A)=\dfrac{53}{72}$

$f'(x)=2(-1)^ax+b$ より，$f'(1)=1$ のとき

$$2(-1)^a+b=1$$

これを満たす $(a,\ b)$ は，次の 3 組

$$(a,\ b)=(1,\ 3),\ (3,\ 3),\ (5,\ 3)$$

(i) より　$B\Longrightarrow A$　ゆえに　$P(B)=P(A\cap B)=\dfrac{3}{6^2}=\dfrac{1}{12}$

よって，求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{53}{72}}=\boldsymbol{\frac{6}{53}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $\sin 5x = \sin(4x + x) = \sin 4x \cos x + \cos 4x \sin x$ であるから

$$\begin{aligned}\sin 4x &= 2\sin 2x \cos 2x = 2\cdot 2\sin x \cos x(1 - 2\sin^2 x)\\ &= 4(\sin x - 2\sin^3 x)\cos x\\ \cos 4x &= 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2(2\sin x \cos x)^2\\ &= 1 - 8\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sin 5x &= 4(\sin x - 2\sin^3 x)\cos x \cos x + (8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1)\sin x\\ &= 4(2\sin^3 x - \sin x)(\sin^2 x - 1) + 8\sin^5 x - 8\sin^3 x + \sin x\\ &= 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x\\ &= \boldsymbol{16A^5 - 20A^3 + 5A}\end{aligned}$$

(2) $x = \dfrac{\pi}{5}$ とおくと　$A = \sin\dfrac{\pi}{5}$，$\sin 5x = 0$
これらを (1) の結果に代入すると

$$16A^5 - 20A^3 + 5A = 0$$

$A \neq 0$ であるから　　$16A^4 - 20A^2 + 5 = 0$

A^2 について解くと　　$A^2 = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$

$A^2 = \sin^2\dfrac{\pi}{5} < \sin^2\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\boldsymbol{\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

(3) $\cos 3x - \cos 7x = 2\sin 5x \sin 2x$ より，$\cos 3x = \cos 7x$ の解は

$$x = \frac{m\pi}{5},\quad x = \frac{n\pi}{2}\quad (m,\ n \text{ は整数})$$

$y = \cos 3x\ (x \geqq 0)$ と $y = \cos 7x\ (x \geqq 0)$ の共有点の x 座標は小さい順に

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{\pi}{5},\ x_3 = \frac{2\pi}{5},\ x_4 = \frac{\pi}{2},\ x_5 = \frac{3\pi}{5},\ x_6 = \frac{4\pi}{5},\ \cdots$$

$x_5 = \dfrac{3\pi}{5}$，$x_6 = \dfrac{4\pi}{5}$，$x_5 \leqq x \leqq x_6$ より

$$\frac{9\pi}{5} \leqq 3x \leqq \frac{12\pi}{5} \quad \text{ゆえに} \quad 2\pi - \frac{\pi}{5} \leqq 3x \leqq 2\pi + \frac{2\pi}{5}$$

これから，関数 $y = \cos 3x \ (x_5 \leqq x \leqq x_6)$ の値域は

$$\cos\frac{2\pi}{5} \leqq y \leqq \cos 0$$

ここで，(2) の結果より

$$\cos\frac{2\pi}{5} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - 2\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

よって，求める値域は $\quad \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \leqq y \leqq 1}$ ■