令和２年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
教育 (第一類・第ニ類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・経済 (昼)・歯 (航空健康科学 (口腔保健))

1 $m,\ p,\ q$ を実数とする．二つの関数

$$f(x)=\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x,\quad g(x)=\frac{1}{6}(x-p)^2+q$$

を考える．座標平面上の放物線

$$C_1: y=f(x),\quad C_2: y=g(x)$$

および直線 $\ell: y=mx$ について，次の二つの条件 (i)，(ii) が成り立つとする．

(i) 直線 ℓ は原点 O において放物線 C_1 に接している．

(ii) 直線 ℓ は放物線 C_2 に接している．

直線 ℓ と放物線 C_2 の接点を A とする．次の問いに答えよ．

(1) m の値を求めよ．

(2) q を p を用いて表せ．また，点 A の座標を p を用いて表せ．

(3) $p\neq -1$ とする．放物線 C_1 と放物線 C_2 の二つの共有点の x 座標を p を用いて表せ．

(4) $p=2$ とする．放物線 C_1 と放物線 C_2 で囲まれた図形のうち，$x\geqq 0$ の範囲にある部分の面積 S と，$x\leqq 0$ の範囲にある部分の面積 T をそれぞれ求めよ．

2 $a,\ b$ を正の定数とする．$0 < \theta < \pi$ を満たす実数 θ に対し，平面上で，次の三つの条件 (i)，(ii)，(iii) を満たす三角形 PAB，およびこの三角形と辺 AB を共有する長方形 ABCD を考える．

(i) $\mathrm{PA} = a$，$\mathrm{PB} = b$，$\angle\mathrm{APB} = \theta$ である．

(ii) 2 点 C，D はともに直線 AB に関して点 P と反対側にある．

(iii) $\mathrm{AB} = 3\mathrm{AD}$ である．

三角形 PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とする．次の問いに答えよ．

(1) 辺 AB の長さを $a,\ b,\ \theta$ を用いて表せ．

(2) S を $a,\ b,\ \theta$ を用いて表せ．

(3) θ が $0 < \theta < \pi$ の範囲を動くときの S の最大値を M とし，S が最大値 M をとるときの θ の値を β とする．M を $a,\ b$ を用いて表せ．また，$\sin\beta$ および $\cos\beta$ の値をそれぞれ求めよ．

(4) $a = 16,\ b = 25$ とする．また，β を (3) で定めた値とする．$\theta = \beta$ のときの，点 P と直線 AB の距離を求めよ．

3 1 個のさいころを 2 回投げる．1 回目に出た目を a_1，2 回目に出た目を a_2 とする．次に，1 枚の硬貨を 2 回投げる．1 回目に表が出た場合は $b_1 = 1$，裏が出た場合は $b_1 = a_1$ とおく．また，2 回目に表が出た場合は $b_2 = 1$，裏が出た場合は $b_2 = a_2$ とおく．ベクトル

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2), \quad \vec{b} = (b_1,\ b_2)$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $a_1 + a_2 = 7$ である確率を求めよ．

(2) $b_1 = 1$ である確率を求めよ．

(3) $\vec{b} = (1,\ 1)$ であったとき，$\vec{a} = (1,\ 6)$ である条件付き確率を求めよ．

(4) $\vec{b} = (1,\ 1)$ であったとき，$a_1 + a_2 = 7$ である条件付き確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数列 $\{a_n\}$ を次の条件 (i)，(ii) により定める．

(i) $a_1 = 1$ である．

(ii) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，n が奇数ならば $a_{n+1} = -a_n + 1$，また n が偶数ならば $a_{n+1} = -2a_n + 3$ である．

さらに，数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{2n-1}$ により定め，数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{2n}$ により定める．次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

(3) 自然数 m に対して，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $(2m-1)$ 項までの和を T_m とする．T_m を m を用いて表せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{1}{3}x$ より　$f'(x)=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$　よって　$m=f'(0)=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(2) $\ell : y=\dfrac{1}{3}x$ と $C_2 : y=\dfrac{1}{6}(x-p)^2+q$ から y を消去すると

$$\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}(x-p)^2+q \quad \text{整理すると} \quad x^2-2(p+1)x+p^2+6q=0$$

ℓ と C_2 は接するから，上の第 2 式の係数について

$$(p+1)^2-1\cdot(p^2+6q)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{q=\frac{1}{3}p+\frac{1}{6}}$$

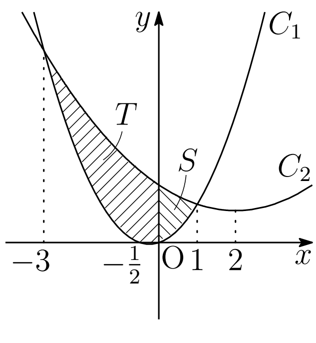
(3) $C_1 : y=\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{1}{3}x$，$C_2 : y=\dfrac{1}{6}(x-p)^2+\dfrac{1}{3}p+\dfrac{1}{6}$
上の 2 式から y を消去して整理すると

$$\begin{aligned}3x^2+2(p+1)x-(p+1)^2&=0\\(x+p+1)(3x-p-1)&=0\end{aligned}$$

よって，求める二つの共有点の x 座標は　$\boldsymbol{x=-p-1,\ \dfrac{p+1}{3}}$

(4) $p=2$ のとき，(2) の結果から

$$q=\frac{5}{6}$$



(3) の結果から，C_1 と C_2 の共有点の x 座標は

$$x=-3,\ 1$$

$-3 \leqq x \leqq 1$ において　$g(x)-f(x) \geqq 0$

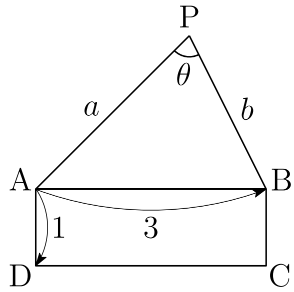
$$\begin{aligned}g(x)-f(x)&=\frac{1}{6}(x-2)^2+\frac{5}{6}-\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x\right)\\&=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x+3)(x-1)\end{aligned}$$

よって　$S+T=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-3}^{1}(x+3)(x-1)\,dx=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot 4^3=\dfrac{16}{3}$

$$S=\int_0^1\left(-\frac{x^2}{2}-x+\frac{3}{2}\right)dx=\left[-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{5}{6}}$$

$$T=\frac{16}{3}-\frac{5}{6}=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\triangle$PAB に余弦定理を適用すると



$$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

AB > 0 であるから

$$\boldsymbol{\mathrm{AB} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}}$$

(2) $\mathrm{AD} = \dfrac{1}{3}\mathrm{AB}$ であるから

$$\text{長方形 ABCD の面積} = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD} = \frac{1}{3}\mathrm{AB}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)$$

また，$\triangle\mathrm{PAB} = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}(a^2 + b^2) + \frac{ab}{6}(3\sin\theta - 4\cos\theta)} \end{aligned}$$

(3) $\cos\varphi = \dfrac{3}{5}$, $\sin\varphi = -\dfrac{4}{5}$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < 0\right)$，(2) の結果から

$$S = \frac{1}{3}(a^2 + b^2) + \frac{5ab}{6}\sin(\theta + \varphi)$$

$0 < \theta < \pi$ より，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta + \varphi < \pi$ であるから，S が最大なるとき，$\theta = \beta$ であるから

$$\beta + \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

よって
$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi = \boldsymbol{\frac{3}{5}}$$
$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \boldsymbol{-\frac{4}{5}}$$

(4) $a = 16$，$b = 25$，$\theta = \beta$ のとき　$S = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta = \dfrac{1}{2}\cdot16\cdot25\cdot\dfrac{3}{5} = 120$

$$\mathrm{AB} = \sqrt{16^2 + 25^2 - 2\cdot16\cdot25\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)} = \sqrt{1521} = 39$$

点 P から直線 AB までの距離を h とすると，$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot h$ であるから

$$120 = \frac{1}{2}\cdot39h \quad \text{よって} \quad h = \boldsymbol{\frac{80}{13}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a_1 + a_2 = 7$ の場合の数の総数は，7 個の○を一列に並べ，間の 6 カ所のうち 1 カ所に仕切りを作り，区切られた○の個数を順番に $a_1,\ a_2$ としたときの場合の総数に等しい．よって，求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_1}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

(2) $b_1 = 1$ となるのは，次の事象である．

- 1 回目に投げた硬貨が表である．
- 1 回目に投げた硬貨が裏で，$a_1 = 1$ である．

これらの事象は，互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \mathbf{\frac{7}{12}}$$

(3) $\vec{a} = (1,\ 6)$，$\vec{b} = (1,\ 1)$ となる事象をそれぞれ A，B とする．(2) の結果から

$$P(B) = \left(\frac{7}{12}\right)^2$$

$A \cap B$ は，さいころの出た目が順に 1, 6 で，硬貨は，1 回目は表・裏どちらでもよく，2 回目が裏となる事象であるから

$$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \mathbf{\frac{2}{49}}$$

(4) $a_1 + a_2 = 7$ となる事象を C とする．$B \cap C$ は，$\{a_1,\ a_2\}$ の組合せが $\{1,\ 6\}$，$\{2,\ 5\}$，$\{3,\ 4\}$ の場合であるから

$$P(B \cap C) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left\{2!\cdot1\cdot\frac{1}{2} + 2!\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2\right\} = 2\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

求める条件付き確率は

$$P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \mathbf{\frac{8}{49}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases} -a_n+1 & (n \text{ が奇数}) \\ -2a_n+3 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$ $\cdots(*)$

したがって
$$\begin{aligned} a_2 &= -a_1+1 = -1+1 = \mathbf{0}, \\ a_3 &= -2a_2+3 = -2\cdot 0+3 = \mathbf{3} \\ a_4 &= -a_3+1 = -3+1 = \mathbf{-2} \\ a_5 &= -2a_4+3 = -2\cdot(-2)+3 = \mathbf{7} \end{aligned}$$

(2) $(*)$ より
$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= -2a_{2n}+3 = -2(-a_{2n-1}+1)+3 = 2a_{2n-1}+1 \\ a_{2n+2} &= -a_{2n+1}+1 = -(-2a_{2n}+3)+1 = 2a_{2n}-2 \end{aligned}$$

$b_n=a_{2n-1}$，$c_n=a_{2n}$ より　$b_1=a_1=1$，$c_1=a_2=0$

$$b_{n+1}=2b_n+1, \quad c_{n+1}=2c_n-2$$

したがって　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$，$c_{n+1}-2=2(c_n-2)$

数列 $\{b_n+1\}$ は，初項 $b_1+1=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n+1=2\cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b_n=2^n-1}$$

数列 $\{c_n-2\}$ は，初項 $c_1-2=-2$，公比 2 の等比数列であるから

$$c_n-2=-2\cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{c_n=-2^n+2}$$

(3) (2) の結果から

$$a_{2n-1}=b_n=2^n-1, \quad a_{2n}=c_n=-2^n+2$$

上の 2 式から，$a_{2n-1}+a_{2n}=1$ であるから，$m>1$ のとき

$$\begin{aligned} T_m &= \sum_{k=1}^{2m-1} a_k = \sum_{j=1}^{m-1}(a_{2j-1}+a_{2j})+a_{2m-1} \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} 1 + (2^m-1) \\ &= 2^m+m-2 \end{aligned}$$

$T_1=a_1=1$ であるから，上式は，$m=1$ のときも成立する．

よって　$\boldsymbol{T_m=2^m+m-2}$