平成31年度　広島大学　２次試験前期日程(数学問題)120分
教育(第一類・第ニ類(技術・情報系)・第四類(人間生活系))・経済(昼)・歯(航空健康科学(口腔保健))

1 $a > 0$，$r > 0$とし，数列$\{a_n\}$を初項a，公比rの等比数列とする．また，数列$\{b_n\}$は次のように定義される．

$$b_1 = a_1, \quad b_{n+1} = b_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の問いに答えよ．

(1) b_nをa，rおよびnを用いて表せ．

(2) 一般項が

$$c_n = \frac{\log_2 b_n}{n}$$

である数列$\{c_n\}$は等差数列であることを証明せよ．

(3) (2)で与えられた数列$\{c_n\}$の初項から第n項までの平均をM_nとする．すなわち，

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k$$

とする．このとき，一般項が

$$d_n = 2^{M_n}$$

である数列$\{d_n\}$は等比数列であることを証明せよ．

2 nを自然数とし，pを$0 < p < 1$を満たす実数とする．一方の面に0，もう一方の面に1と書いたカードがある．最初，このカードは0と書かれた面が上になるように置いてある．表の出る確率がpのコインを投げ，裏が出たときだけカードを裏返すという試行をn回繰り返して行う．n回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が0である確率をP_nとおく．次の問いに答えよ．

(1) P_nをpおよびnを用いて表せ．

(2) $n \geqq 2$とする．n回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が0であり，さらに，途中でカードが少なくとも1回裏返されたことがわかっている．このとき，ちょうど2回裏返された確率をpおよびnを用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面上の二つの曲線

$$C : y = x^3, \quad C' : y = 8x^3$$

と曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_1(1,\ 1)$ を考える．点 P_1 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_1 とし，点 Q_1 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_2 とする．次に，点 P_2 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_2 とし，点 Q_2 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_3 とする．このように，自然数 n に対して，点 P_n を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_n とし，点 Q_n を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_{n+1} とする．点 P_n の x 座標を a_n とおく．次の問いに答えよ．

(1) a_n を n を用いて表せ．

(2) 点 P_{n+1} における曲線 C の接線，直線 $x = a_n$ および曲線 C で囲まれる部分のうち，$a_{n+1} \leqq x \leqq a_n$ の領域にある面積を S_n とする．S_n を n を用いて表せ．

(3) $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ とおく．T_n を n を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 原点をOとする座標平面上において，点A$(0,\ 3)$，B$(0, -1)$ および x 軸上の正の部分を動く点P$(t,\ 0)$ があり，$\angle$APB は鈍角でないとする．$\triangle$ABP の垂心をH，頂点Aから辺BPに下ろした垂線と辺BPとの交点をD，頂点Bから辺PAに下ろした垂線と辺PAとの交点をEとする．次の問いに答えよ．ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした3本の垂線は1点で交わることが知られている．その交点のことを，三角形の垂心という．

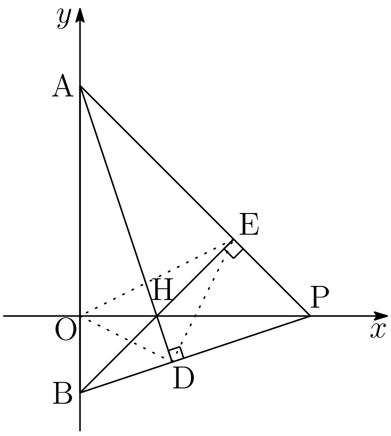
(1) $\angle$APB が直角となる t の値を求めよ．

(2) 点Hの座標を t を用いて表せ．

以下では，t が (1) で求めた値よりも大きい値をとるとする．

(3) 点Hが $\triangle$ODE の内心であることを証明せよ．ただし，1組の対角の和が 180° である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい．

(4) $\triangle$ODE の内接円の半径を t を用いて表せ．



解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 a，公比 r の等比数列であるから $(a>0,\ r>0)$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$b_1 = a_1 = a$，$b_{n+1} = b_n a_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ より $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = ar^n$

$n \geqq 2$ のとき

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \prod_{k=1}^{n-1} ar^k \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b_n}{a} = a^{n-1} r^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$n=1$ のときも，上式は成立することから $\boldsymbol{b_n = a^n r^{\frac{1}{2}n(n-1)}}$

(2) (1) の結果から $\log_2 b_n = n\log_2 a + \dfrac{1}{2}n(n-1)\log_2 r$

したがって $c_n = \dfrac{\log_2 b_n}{n} = \log_2 a + \dfrac{1}{2}(n-1)\log_2 r$

よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項 $\log_2 a$，公差 $\dfrac{1}{2}\log_2 r$ の等差数列

(3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n}\left\{\log_2 a + \frac{1}{2}(k-1)\log_2 r\right\} = n\log_2 a + \frac{1}{4}n(n-1)\log_2 r$$

ゆえに

$$\begin{aligned} M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k &= \frac{1}{n}\left\{n\log_2 a + \frac{1}{4}n(n-1)\log_2 r\right\} \\ &= \log_2 a + \frac{1}{4}(n-1)\log_2 r \end{aligned}$$

したがって $d_n = 2^{M_n} = ar^{\frac{1}{4}(n-1)}$

よって，数列 $\{d_n\}$ は，初項 a，公比 $r^{\frac{1}{4}}$ の等比数列である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$P_1 = p, \quad P_{n+1} = pP_n + (1-p)(1-P_n) \qquad (n \geqq 1)$$

ゆえに $$P_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$$

したがって $$P_n - \frac{1}{2} = (2p-1)^{n-1}\left(p - \frac{1}{2}\right)$$

よって $$\boldsymbol{P_n = \frac{1}{2}\{1 + (2p-1)^n\}}$$

(2) n 回の試行で少なくとも 1 回裏返されて，n 回終了後にカードの上の面が 0 である事象を A とし，n 回の試行でちょうど 2 回裏返される事象を B とする．

$$P(A) = P_n - p^n = \frac{1}{2}\{1 + (2p-1)^n\} - p^n$$
$$P(A \cap B) = {}_n\mathrm{C}_2 \cdot p^{n-2}(1-p)^2 = \frac{1}{2}n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2}{\frac{1}{2}\{1 + (2p-1)^n\} - p^n}$$
$$= \boldsymbol{\frac{n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2}{1 + (2p-1)^n - 2p^n}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) P_n，P_{n+1} は $C: y=x^3$ 上の点であるから

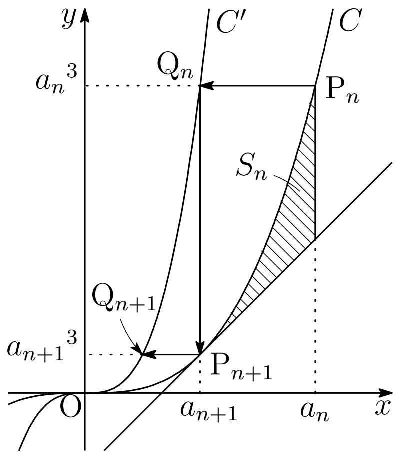
$$\mathrm{P}_n(a_n,\ {a_n}^3),\quad \mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ {a_{n+1}}^3)$$

右の図から，Q_n の座標は，P_{n+1} の x 座標および P_n の y 座標と等しいから

$$\mathrm{Q}_n\left(a_{n+1},\ {a_n}^3\right)$$

Q_n は $C': y=8x^3$ 上の点であるから

$${a_n}^3 = 8{a_{n+1}}^3 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$$



$a_1=1$ であるから，上式より　$a_n = a_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^{n-1}}}$

(2) $C: y=x^3$ より　$y'=3x^2$

ここで，C 上の点 $(\alpha,\ \alpha^3)$ における接線を ℓ とすると，その方程式は

$$y-\alpha^3 = 3\alpha^2(x-\alpha) \quad \text{ゆえに} \quad y=3\alpha^2x-2\alpha^3$$

C と ℓ で囲まれる部分のうち，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の領域にある面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \{x^3-(3\alpha^2x-2\alpha^3)\}\,dx = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x+2\alpha)\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^3+3\alpha(x-\alpha)^2\}\,dx = \left[\ \frac{1}{4}(x-\alpha)^4+\alpha(x-\alpha)^3\ \right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{4}(3\alpha+\beta)(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

上式に $\alpha = a_{n+1} = \dfrac{1}{2^n}$，$\beta = a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を代入することにより

$$S_n = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}\right)^3 = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2^{4n+2}}}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n \frac{5}{2^{4k+2}} = \frac{5}{64}\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{16}\right)^{k-1} \\ &= \frac{5}{64}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n}{1-\frac{1}{16}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^{4n}}}\right) \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 3点 A$(0,\ 3)$，B$(0, -1)$，P$(t,\ 0)$ $(t>0)$ により

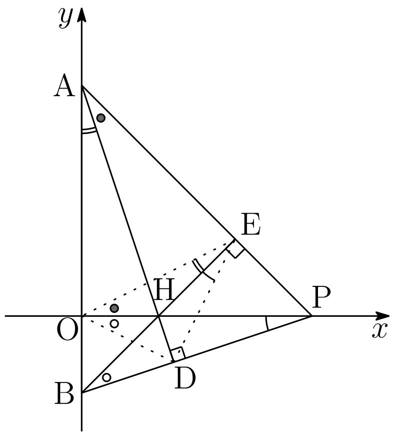
$$\text{直線 AP の傾きは}\ -\frac{3}{t},\qquad \text{直線 BP の傾きは}\ \frac{1}{t}$$

2直線 AP，BP は直交するから $\quad -\dfrac{3}{t}\cdot\dfrac{1}{t}=-1$ よって $\boldsymbol{t=\sqrt{3}}$

(2) 直線 BE は点 B$(0, -1)$ を通り，傾き $\dfrac{t}{3}$ であるから (直線 AP に垂直)

$$y=\frac{t}{3}x-1 \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{t}{3}\left(x-\frac{3}{t}\right) \quad \text{よって} \quad \mathbf{H}\left(\boldsymbol{\frac{3}{t},\ 0}\right)$$

(3) 四角形 AOHE，四角形 OBDH，四角形 HDPE は，それぞれ対角の和が 180° であるから，円に内接する．



四角形 AOHE において　$\angle\mathrm{EOH}=\angle\mathrm{EAH}$

$\angle\mathrm{OEH}=\angle\mathrm{OAH}$

四角形 OBDH において　$\angle\mathrm{HOD}=\angle\mathrm{HBD}$

四角形 HDPE において　$\angle\mathrm{HED}=\angle\mathrm{HPD}$

$\triangle\mathrm{AHE}\backsim\triangle\mathrm{BHD}$ より　$\angle\mathrm{EAH}=\angle\mathrm{HBD}$

$\triangle\mathrm{AHO}\backsim\triangle\mathrm{PHD}$ より　$\angle\mathrm{OAH}=\angle\mathrm{HPD}$

上の第1，第3，第5式から

$$\angle\mathrm{EOH}=\angle\mathrm{HOD}\quad\cdots①$$

同様に，上の第2，第4，第6式から

$$\angle\mathrm{OEH}=\angle\mathrm{HED}\quad\cdots②$$

①，② より，$\triangle\mathrm{ODE}$ において，線分 OH，EH は，それぞれ $\angle\mathrm{O}$，$\angle\mathrm{E}$ の二等分線である．よって，点 H は $\triangle\mathrm{ODE}$ の内心である．

(4) 点 E は，直線 AP : $y=-\dfrac{3}{t}x+3$ と (2) の直線 $y=\dfrac{t}{3}x-1$ 交点である．

これらの連立方程式を解くと　$\mathrm{E}\left(\dfrac{12t}{t^2+9},\ \dfrac{3t^2-9}{t^2+9}\right)$

ゆえに，直線 OE の方程式は　$y=\dfrac{3t^2-9}{12t}x$　すなわち　$(t^2-3)x-4ty=0$

$\triangle\mathrm{ODE}$ の内接円の半径は，点 $\mathrm{H}\left(\dfrac{3}{t},\ 0\right)$ から直線 OE までの距離であるから $(t>\sqrt{3})$

$$\frac{\left|(t^2-3)\cdot\dfrac{3}{t}-4t\cdot 0\right|}{\sqrt{(t^2-3)^2+(-4t)^2}}=\boldsymbol{\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}}$$