平成 31 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・
経済 (昼)・歯 (口腔健康科学 (口腔保健))

問題 1 2 3 4

1 $a > 0$，$r > 0$ とし，数列 $\{a_n\}$ を初項 a，公比 r の等比数列とする．また，数列 $\{b_n\}$ は次のように定義される．

$$b_1 = a_1, \quad b_{n+1} = b_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の問いに答えよ．

(1) b_n を a，r および n を用いて表せ．

(2) 一般項が

$$c_n = \frac{\log_2 b_n}{n}$$

である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明せよ．

(3) (2) で与えられた数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの平均を M_n とする．すなわち，

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k$$

とする．このとき，一般項が

$$d_n = 2^{M_n}$$

である数列 $\{d_n\}$ は等比数列であることを証明せよ．

2 n を自然数とし，p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする．一方の面に 0，もう一方の面に 1 と書いたカードがある．最初，このカードは 0 と書かれた面が上になるように置いてある．表の出る確率が p のコインを投げ，裏が出たときだけカードを裏返すという試行を n 回繰り返して行う．n 回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が 0 である確率を P_n とおく．次の問いに答えよ．

(1) P_n を p および n を用いて表せ．

(2) $n \geqq 2$ とする．n 回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が 0 であり，さらに，途中でカードが少なくとも 1 回裏返されたことがわかっている．このとき，ちょうど 2 回裏返された確率を p および n を用いて表せ．

3 座標平面上の二つの曲線

$$C : y = x^3, \quad C' : y = 8x^3$$

と曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_1(1,\ 1)$ を考える．点 P_1 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_1 とし，点 Q_1 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_2 とする．次に，点 P_2 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_2 とし，点 Q_2 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_3 とする．このように，自然数 n に対して，点 P_n を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_n とし，点 Q_n を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_{n+1} とする．点 P_n の x 座標を a_n とおく．次の問いに答えよ．

(1) a_n を n を用いて表せ．

(2) 点 P_{n+1} における曲線 C の接線，直線 $x = a_n$ および曲線 C で囲まれる部分のうち，$a_{n+1} \leqq x \leqq a_n$ の領域にある面積を S_n とする．S_n を n を用いて表せ．

(3) $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ とおく．T_n を n を用いて表せ．

4 原点をOとする座標平面上において，点A$(0,\ 3)$，B$(0, -1)$およびx軸上の正の部分を動く点P$(t,\ 0)$があり，$\angle$APBは鈍角でないとする．$\triangle$ABPの垂心をH，頂点Aから辺BPに下ろした垂線と辺BPとの交点をD，頂点Bから辺PAに下ろした垂線と辺PAとの交点をEとする．次の問いに答えよ．ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした3本の垂線は1点で交わることが知られている．その交点のことを，三角形の垂心という．

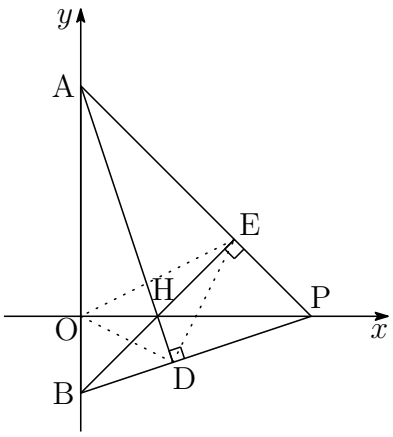
(1) $\angle$APBが直角となるtの値を求めよ．

(2) 点Hの座標をtを用いて表せ．

以下では，tが(1)で求めた値よりも大きい値をとるとする．

(3) 点Hが$\triangle$ODEの内心であることを証明せよ．ただし，1組の対角の和が180°である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい．

(4) $\triangle$ODEの内接円の半径をtを用いて表せ．



解答例

1 (1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 a，公比 r の等比数列であるから $(a>0,\ r>0)$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$b_1 = a_1 = a$，$b_{n+1} = b_n a_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ より　$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = ar^n$

$n \geqq 2$ のとき

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \prod_{k=1}^{n-1} ar^k \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b_n}{a} = a^{n-1} r^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$n=1$ のときも，上式は成立することから　$\boldsymbol{b_n = a^n r^{\frac{1}{2}n(n-1)}}$

(2) (1) の結果から　$\log_2 b_n = n\log_2 a + \dfrac{1}{2}n(n-1)\log_2 r$

したがって　$c_n = \dfrac{\log_2 b_n}{n} = \log_2 a + \dfrac{1}{2}(n-1)\log_2 r$

よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項 $\log_2 a$，公差 $\dfrac{1}{2}\log_2 r$ の等差数列

(3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \log_2 a + \frac{1}{2}(k-1)\log_2 r \right\} = n\log_2 a + \frac{1}{4}n(n-1)\log_2 r$$

ゆえに

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k = \frac{1}{n}\left\{ n\log_2 a + \frac{1}{4}n(n-1)\log_2 r \right\}$$
$$= \log_2 a + \frac{1}{4}(n-1)\log_2 r$$

したがって　$d_n = 2^{M_n} = ar^{\frac{1}{4}(n-1)}$

よって，数列 $\{d_n\}$ は，初項 a，公比 $r^{\frac{1}{4}}$ の等比数列である．　■

2 (1) 条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$P_1 = p, \quad P_{n+1} = pP_n + (1-p)(1-P_n) \qquad (n \geqq 1)$$

ゆえに $$P_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$$

したがって $$P_n - \frac{1}{2} = (2p-1)^{n-1}\left(p - \frac{1}{2}\right)$$

よって $$\boldsymbol{P_n = \frac{1}{2}\{1 + (2p-1)^n\}}$$

(2) n 回の試行で少なくとも 1 回裏返されて，n 回終了後にカードの上の面が 0 である事象を A とし，n 回の試行でちょうど 2 回裏返される事象を B とする．

$$P(A) = P_n - p^n = \frac{1}{2}\{1 + (2p-1)^n\} - p^n$$
$$P(A \cap B) = {}_n\mathrm{C}_2 \cdot p^{n-2}(1-p)^2 = \frac{1}{2}n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2}{\frac{1}{2}\{1 + (2p-1)^n\} - p^n}$$
$$= \boldsymbol{\frac{n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2}{1 + (2p-1)^n - 2p^n}}$$

■

3 (1) P_n，P_{n+1} は $C : y = x^3$ 上の点であるから

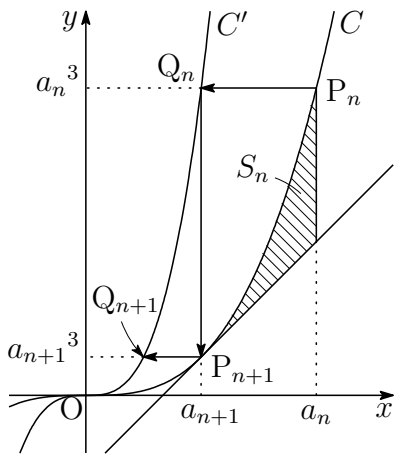
$$\mathrm{P}_n(a_n,\ {a_n}^3),\quad \mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ {a_{n+1}}^3)$$

右の図から，Q_n の座標は，P_{n+1} の x 座標および P_n の y 座標と等しいから

$$\mathrm{Q}_n\left(a_{n+1},\ {a_n}^3\right)$$

Q_n は $C' : y = 8x^3$ 上の点であるから

$${a_n}^3 = 8{a_{n+1}}^3 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$$



$a_1 = 1$ であるから，上式より $\quad a_n = a_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2^{n-1}}}$

(2) $C : y = x^3$ より $\quad y' = 3x^2$

ここで，C 上の点 $(\alpha,\ \alpha^3)$ における接線を ℓ とすると，その方程式は

$$y - \alpha^3 = 3\alpha^2(x - \alpha) \quad \text{ゆえに} \quad y = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3$$

C と ℓ で囲まれる部分のうち，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の領域にある面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \{x^3 - (3\alpha^2 x - 2\alpha^3)\}\,dx = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x+2\alpha)\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^3 + 3\alpha(x-\alpha)^2\}\,dx = \left[\ \frac{1}{4}(x-\alpha)^4 + \alpha(x-\alpha)^3\ \right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{4}(3\alpha+\beta)(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

上式に $\alpha = a_{n+1} = \dfrac{1}{2^n}$，$\beta = a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を代入することにより

$$S_n = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{5}{2^{4n+2}}}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n \frac{5}{2^{4k+2}} = \frac{5}{64}\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{16}\right)^{k-1} \\ &= \frac{5}{64}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n}{1-\frac{1}{16}} = \boldsymbol{\frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{2^{4n}}\right)} \end{aligned}$$

■

4 (1) 3 点 A(0, 3)，B(0, −1)，P(t, 0) ($t>0$) により

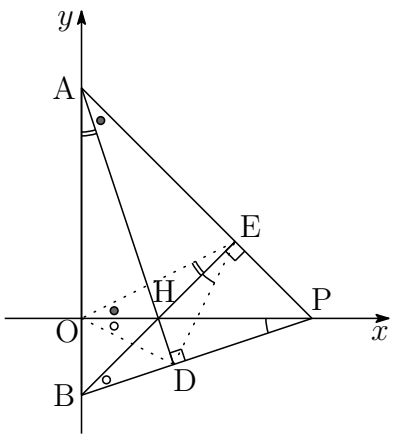
直線 AP の傾きは $-\dfrac{3}{t}$，　直線 BP の傾きは $\dfrac{1}{t}$

2 直線 AP，BP は直交するから　$-\dfrac{3}{t}\cdot\dfrac{1}{t}=-1$　よって　$\boldsymbol{t=\sqrt{3}}$

(2) 直線 BE は点 B(0, −1) を通り，傾き $\dfrac{t}{3}$ であるから (直線 AP に垂直)

$$y=\frac{t}{3}x-1 \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{t}{3}\left(x-\frac{3}{t}\right) \quad \text{よって} \quad \mathbf{H}\left(\boldsymbol{\frac{3}{t},\ 0}\right)$$

(3) 四角形 AOHE，四角形 OBDH，四角形 HDPE は，それぞれ対角の和が 180° であるから，円に内接する．



四角形 AOHE において　∠EOH = ∠EAH
　　∠OEH = ∠OAH
四角形 OBDH において　∠HOD = ∠HBD
四角形 HDPE において　∠HED = ∠HPD
△AHE ∽ △BHD より　∠EAH = ∠HBD
△AHO ∽ △PHD より　∠OAH = ∠HPD

上の第 1，第 3，第 5 式から

∠EOH = ∠HOD　…①

同様に，上の第 2，第 4，第 6 式から

∠OEH = ∠HED　…②

①，② より，△ODE において，線分 OH，EH は，それぞれ ∠O，∠E の二等分線である．よって，点 H は △ODE の内心である．

(4) 点 E は，直線 AP : $y=-\dfrac{3}{t}x+3$ と (2) の直線 $y=\dfrac{t}{3}x-1$ 交点である．

これらの連立方程式を解くと　$\mathrm{E}\left(\dfrac{12t}{t^2+9},\ \dfrac{3t^2-9}{t^2+9}\right)$

ゆえに，直線 OE の方程式は　$y=\dfrac{3t^2-9}{12t}x$　すなわち　$(t^2-3)x-4ty=0$

△ODE の内接円の半径は，点 $\mathrm{H}\left(\dfrac{3}{t},\ 0\right)$ から直線 OE までの距離であるから ($t>\sqrt{3}$)

$$\frac{\left|(t^2-3)\cdot\dfrac{3}{t}-4t\cdot 0\right|}{\sqrt{(t^2-3)^2+(-4t)^2}}=\boldsymbol{\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}}$$

■