平成 30 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
教育 (第一類・第ニ類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・経済 (昼)・歯 (航空健康科学 (口腔保健))

1 次の問いに答えよ．

(1) t の 2 次関数 $s = \left(t - \dfrac{1}{5}\right)\left(t - \dfrac{3}{5}\right)$ のグラフを図示せよ．

(2) 次の条件 (A) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(A) 2 次式 $t^2 - ut + v$ は，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$ と因数分解される．

(3) 次の条件 (B) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(B) 2 次式 $t^2 - ut + v$ は，$0 \leqq x \leqq 1$，$1 \leqq y \leqq 2$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$ と因数分解される．

(4) 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x + y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 実数 θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，不等式

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} < 1$$

が成り立つことを示せ．

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \quad \left(0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

により定まる実数 α は，θ についての整数 $f(\theta)$ を用いて $\alpha = f(\theta)$ と表すことができる．このような $f(\theta)$ を一つ求めよ．

(3) (2) で求めた $f(\theta)$ を用いて，数列 $\{\theta_n\}$ を

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{n+1} = f(\theta_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) (3) の数列 $\{\theta_n\}$ に対し，

$$|\theta_{n+1} - \theta_n| \leqq \frac{\pi}{1000}$$

となる最小の自然数 n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ O を原点とする座標平面上の曲線

$$C : y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{13}{6}$$

を考える．C 上の点 D$(-1,\ 2)$ における C の接線を ℓ とし，D と異なる C と ℓ の共有点を E とする．次の問いに答えよ．

(1) ℓ の方程式を求めよ．

(2) E の座標を求めよ．

(3) 原点 O を中心とする半径 1 の円の周上の点 A$(a,\ b)$ を考える．ただし，a と b はともに正であるとする．直線 ℓ 上の動点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が P の位置によらず一定であるとき，A の座標を求めよ．

(4) A を (3) で求めた点とする．点 Q が C 上を D から E まで動くときの $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標平面上で，三つの不等式

$$y \geqq 0, \quad x+y \geqq 4, \quad 2x+3y \leqq 12$$

によって表される領域を D とする．次の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．

(2) 座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．D に含まれる格子点をすべて求めよ．

(3) 1 個のさいころを 2 回投げるとき，1 回目に出た目の数を X，2 回目に出た目の数を Y とする．点 $(X,\ Y)$ が D に含まれる確率を求めよ．

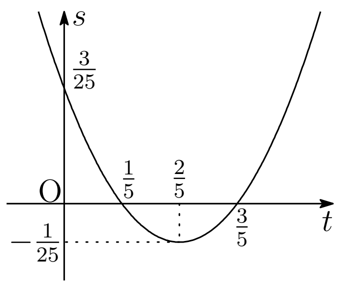
(4) 1 個のさいころを n 回投げるとき，出た目の数の中の最小の数を Z，最大の数を W とする．点 $(Z,\ W)$ が D に含まれる確率 P_n を求めよ．ただし，n は 2 以上の自然数とする．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $s=\left(t-\dfrac{1}{5}\right)\left(t-\dfrac{3}{5}\right)$ より

$$s=\left(t-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{1}{25}$$

グラフの概形は右の図のようになる．



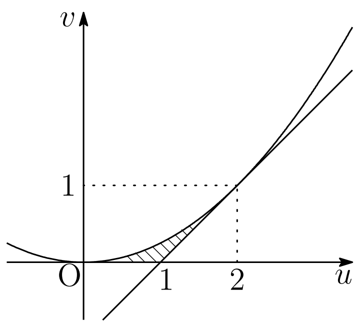
(2) $f(t)=t^2-ut+v$ とおくと　$f(t)=\left(t-\dfrac{u}{2}\right)^2+v-\dfrac{u^2}{4}$

2 次方程式 $f(t)=0$ の実数解 $x,\ y$ が $0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ を満たすから，$f(0)\geqq 0$，$f(1)\geqq 0$ および上式より

$$v\geqq 0,\quad 1-u+v\geqq 0,\quad 0\leqq\frac{u}{2}\leqq 1,\quad v-\frac{u^2}{4}\leqq 0$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} 0\leqq u\leqq 2 \\ v\geqq 0 \\ v\geqq u-1 \\ v\leqq \dfrac{u^2}{4} \end{cases}$$



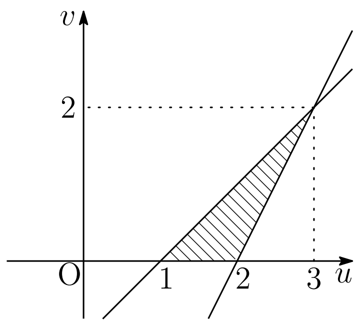
よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界を含む．

(3) 2 次方程式 $f(t)=0$ の実数解 $x,\ y$ が $0\leqq x\leqq 1\leqq y\leqq 2$ を満たすから，$f(0)\geqq 0$，$f(1)\leqq 0$，$f(2)\geqq 0$ より

$$v\geqq 0,\quad 1-u+v\leqq 0,\quad 4-2u+v\geqq 0$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} v\geqq 0 \\ v\leqq u-1 \\ v\geqq 2u-4 \end{cases}$$



よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界を含む．

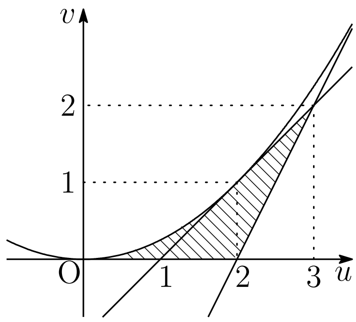
(4) $A = \{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$，$B = \{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1 \leqq y \leqq 2\}$ とすると，$(x,\ y)$ が 4 点 $(0,0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部は $A \cup B$ である．(1)，(2) で求めた領域をそれぞれ E，F とすると

点 $(x+y,\ xy)$　すなわち　点 $(u,\ v)$

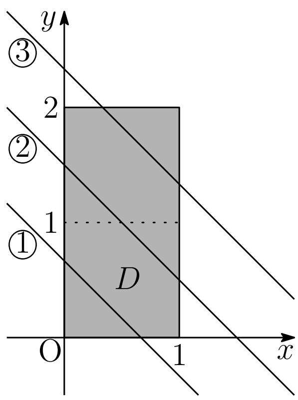
の表す領域は $E \cup F$ で，右の図のようになる．

よって，求める面積を S とすると

$$S = \int_0^2 \frac{u^2}{4}\,du + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$
$$= \left[\frac{u^3}{12}\right]_0^2 + \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{7}{6}}$$



別解 $D = \{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2\}$ とし，直線 $x+y=u$ 上の点 $(x,\ y) \in D$ における $v = xy$ のとる値の範囲を求める．



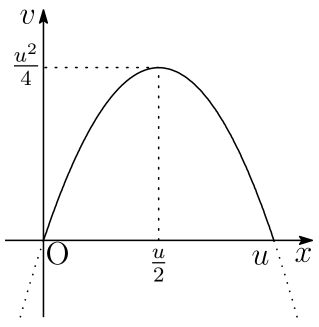
$$v = x(u-x) = -\left(x - \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{u^2}{4}$$

① $0 \leqq u \leqq 1$ のとき　$0 \leqq x \leqq u$

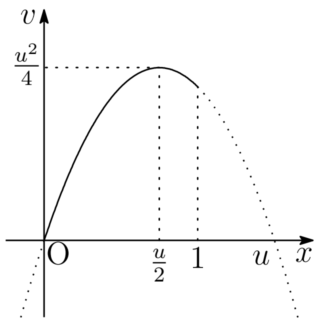
② $1 \leqq u \leqq 2$ のとき　$0 \leqq x \leqq 1$

③ $2 \leqq u \leqq 3$ のとき　$u-2 \leqq x \leqq 1$

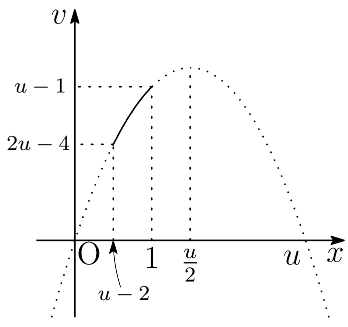
① $0 \leqq u \leqq 1$



② $1 \leqq u \leqq 2$



③ $2 \leqq u \leqq 3$



(i) $0 \leqq u \leqq 2$ のとき　$0 \leqq v \leqq \dfrac{u^2}{4}$

(ii) $2 \leqq u \leqq 3$ のとき　$2u-4 \leqq v \leqq u-1$

よって　$S = \displaystyle\int_0^2 \frac{u^2}{4}\,du + \int_2^3 \{(u-1)-(2u-4)\}\,du = \frac{7}{6}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$0 \leqq \cos\theta \leqq 1$　ゆえに　$0 \leqq \dfrac{1-\cos\theta}{2} \leqq \dfrac{1}{2}$

よって　$\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}} \leqq \sqrt{\dfrac{1}{2}} < 1$

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$　$\left(0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$2\cos^2\alpha - 1 = -\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos 2\alpha = \cos(\pi - \theta)$$

このとき，$0 \leqq 2\alpha \leqq \pi$，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \pi - \theta \leqq \pi$ であるから，上の第 2 式から

$$2\alpha = \pi - \theta \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}}$$

(3) $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$ より，(2) の結果から　$\theta_{n+1} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta_n}{2}$

したがって　$\theta_{n+1} - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}\left(\theta_n - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$ より　$\theta_n - \dfrac{\pi}{3} = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　よって　$\boldsymbol{\theta_n = \dfrac{\pi}{3}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}$

(4) (3) の結果から　$\theta_{n+1} - \theta_n = \dfrac{\pi}{3}\left\{-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\} = -\pi\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

したがって　$|\theta_{n+1} - \theta_n| = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

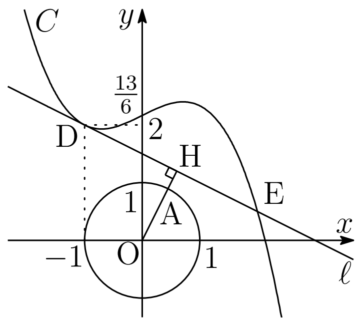
$|\theta_{n+1} - \theta_n| \leqq \dfrac{\pi}{1000}$ より

$$\frac{\pi}{2^{n+1}} \leqq \frac{\pi}{1000} \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n+1} \geqq 1000$$

$2^9 = 512$，$2^{10} = 1024$ より，上式を満たす最小の自然数 n は

$$n + 1 = 10 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{n = 9}$$

3 (1) $y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{13}{6}$ より　$y'=-x^2+\frac{1}{2}$



$x=-1$ のとき　　$y'=-\frac{1}{2}$

ℓ は点 D$(-1,\ 2)$ を通り，傾き $-\frac{1}{2}$ の直線である

$y-2=-\frac{1}{2}(x+1)$　すなわち　$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

(2) C と ℓ の共有点は　$(*)\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{13}{6} \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases}$

$(*)$ から y を消去すると　$-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{13}{6}=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

整理すると　$x^3-3x-2=0$　ゆえに　$(x+1)^2(x-2)=0$

E の x 座標は $x\neq-1$ に注意して　$x=2$　これを $(*)$ に代入して　E$\left(\boldsymbol{2,\ \frac{1}{2}}\right)$

(3) O から ℓ に垂線 OH を引くと，直線 OH の方程式は　$y=2x$

直線 OH と ℓ の交点 H の座標は　$\left(\frac{3}{5},\ \frac{6}{5}\right)$

ℓ の方向ベクトルを $\vec{v}=(2,-1)$ とし，直線 OH の方向ベクトルを $\vec{n}=(1,\ 2)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+t\vec{v}=t\vec{v}+\frac{3}{5}\vec{n}\quad (t\text{ は媒介変数})$$

$(1,\ 0)=\frac{1}{5}(2\vec{v}+\vec{n})$，$(0,\ 1)=\frac{1}{5}(-\vec{v}+2\vec{n})$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=(a,\ b)=a(1,\ 0)+b(0,1)\\&=\frac{a}{5}(2\vec{v}+\vec{n})+\frac{b}{5}(-\vec{v}+2\vec{n})=\frac{2a-b}{5}\vec{v}+\frac{a+2b}{5}\vec{n}\quad\cdots(**)\end{aligned}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2a-b}{5}t|\vec{v}|^2+\frac{3}{25}(a+2b)|\vec{n}|^2=(2a-b)t+\frac{3}{5}(a+2b)$

上式は t の値によらず一定であるから　$2a-b=0$　$\cdots$①

点 A$(a,\ b)$ は円 $x^2+y^2=1$ 上の第 1 象限にあるから

$$a^2+b^2=1\ (a>0,\ b>0)\quad\cdots②$$

①，② を解いて　$a=\frac{1}{\sqrt{5}},\ b=\frac{2}{\sqrt{5}}$　よって　A$\left(\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}}\right)$

(4) 点 Q$(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は，$(**)$ と同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(x,\ y)=\frac{2x-y}{5}\vec{v}+\frac{x+2y}{5}\vec{n}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{n}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\frac{x+2y}{5\sqrt{5}}|\vec{n}|^2=\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{3}x^3+2x+\frac{13}{3}\right)\end{aligned}$$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(-\dfrac{2}{3}x^3+2x+\dfrac{13}{3}\right)$ とおくと $(-1\leqq x\leqq 2)$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x^2+2)=-\frac{2}{\sqrt{5}}(x+1)(x-1)$$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{3}{\sqrt{5}}$	$\nearrow$	$\frac{17}{3\sqrt{5}}$	$\searrow$	$\frac{3}{\sqrt{5}}$

よって，Q$\left(1,\ \dfrac{7}{3}\right)$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{17\sqrt{5}}{15}}$ をとる．

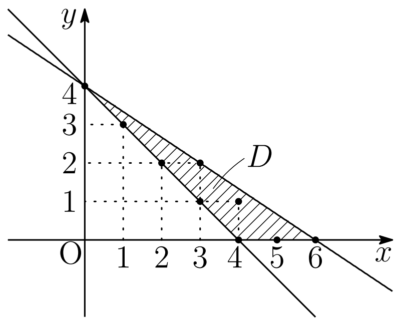
補足 点 Q が C 上を D から E まで動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を与える点における接線は ℓ に平行である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 三つの不等式

$$y \geqq 0, \quad x+y \geqq 4, \quad 2x+3y \leqq 12$$

すなわち $\begin{cases} y \geqq 0 \\ y \geqq -x+4 \\ y \leqq -\dfrac{2}{3}x+4 \end{cases}$

この連立不等式の表す領域 D は，右の図の斜線部分で境界線を含む．



(2) (1) の図から，求める格子点は

(0, 4)，(1, 3)，(2, 2)，(3, 1)，(3, 2)，(4, 0)，(4, 1)，(5, 0)，(6, 0)

(3) 点 $(X,\ Y)$ が D に含まれるものは，次の 5 通り．

$$(X,\ Y)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$$

よって，求める確率は $\dfrac{5}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{5}{36}}$

(4) $1 \leqq Z \leqq W \leqq 6$ である $(Z,\ W)$ の組は $(Z,\ W)=(1,\ 3),\ (2,\ 2)$

(i) $(Z,\ W)=(1,\ 3)$ のとき
$1 \leqq Z \leqq W \leqq 3$，$1 \leqq Z \leqq W \leqq 2$，$2 \leqq Z \leqq W \leqq 3$ である事象をそれぞれ A，B，C とすると，このときの確率は

$$\begin{aligned} P(A)-P(B\cup C) &= P(A)-P(B)-P(C)+P(B\cap C) \\ &= \frac{3^n}{6^n}-\frac{2^n}{6^n}-\frac{2^n}{6^n}+\frac{1^n}{6^n} \\ &= \frac{3^n-2^{n+1}+1}{6^n} \end{aligned}$$

(ii) $(Z,\ W)=(2,\ 2)$ のとき，$Z=W=2$ であるから，このときの確率は

$$\frac{1^n}{6^n}=\frac{1}{6^n}$$

(i),(ii) は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{3^n-2^{n+1}+1}{6^n}+\frac{1}{6^n}=\boldsymbol{\frac{3^n-2^{n+1}+2}{6^n}}$$