平成 29 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・経済 (昼)・歯 (航空健康科学 (口腔保健))

1 座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$ を考え，A，B 間の距離を L とする．ただし，θ は条件

$$(*)\qquad 0 \leqq \theta < 2\pi \quad \text{かつ} \quad \sin\theta - \cos\theta - 1 > 0$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $(*)$ を満たす θ の範囲を求めよ．

(2) $t = \sin\theta\cos\theta$ とおくとき，t のとり得る値の範囲を求めよ．

(3) L を (2) の t を用いて表せ．

(4) L の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

2 座標平面上の 3 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\quad \mathrm{A}(3,\ 0),\quad \mathrm{B}(1,\ 2)$$

を考える．C を線分 OA 上にあり，$\angle\mathrm{OBC} = 45^\circ$ を満たす点とする．また，P を x 座標が t である直線 OA 上の点とする．点 Q，R，P$'$ を次により定める．

(a) 点 P を通り傾きが 1 の直線と，直線 AB の交点を Q とする．

(b) 点 Q を通り直線 OB に垂直な直線と，直線 OB の交点を R とする．

(c) 点 R を通り直線 BC と同じ傾きをもつ直線と，直線 OA の交点を P$'$ とする．

次の問いに答えよ．

(1) 点 Q の座標を t を用いて表せ．

(2) 点 R の座標を t を用いて表せ．

(3) 点 P$'$ の座標を t を用いて表せ．

(4) 点 P$'$ の x 座標を $f(t)$ とする．数列 $\{t_n\}$ を

$$t_1 = 2,\quad t_{n+1} = f(t_n)\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．数列 $\{t_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ n を 2 以上の整数とする．n 個のさいころを投げ，出た目のすべての積を X とする．次の問いに答えよ．

(1) X が 5 の倍数である確率を n を用いて表せ．

(2) X が 5 の倍数である確率が 0.99 より大きくなる最小の n を求めよ．ただし，$\log_2 3 = 1.585$，$\log_2 5 = 2.322$ とする．

(3) X が 3 でも 5 でも割り切れない確率を n を用いて表せ．

(4) X が 15 の倍数である確率を n を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標平面上の二つの曲線

$$C_1 : y = 4x^3 - 1, \quad C_2 : y = x^3$$

を考える．$a > 0$ に対して，x 座標が a である C_1 上の点を A とし，A における C_1 の接線を ℓ とする．次の問いに答えよ．

(1) C_1 と C_2 の交点の x 座標を p とする．p の値を求めよ．

(2) 直線 ℓ の方程式を，a を用いて表せ．

(3) 直線 ℓ が C_2 に接するとき，a の値を求めよ．

(4) (3) のとき，直線 ℓ と C_2 の接点を B とする．C_1，C_2 と線分 AB で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\sin\theta - \cos\theta - 1 > 0$ より

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{4} < \theta - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{7}{4}\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\frac{\pi}{2} < \theta < \pi}$$

(2) $$t = \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta \quad \cdots(*)$$

(1) の結果から，$\pi < 2\theta < 2\pi$ であるから $\quad \boldsymbol{-\dfrac{1}{2} \leqq t < 0}$

(3) $\mathrm{A}(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$ より

$$\begin{aligned} L^2 &= (\sin\theta - \cos\theta)^2 + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)^2 \\ &= (\sin\theta - \cos\theta)^2\{1 + (\sin\theta + \cos\theta)^2\} \\ &= (1 - 2\sin\theta\cos\theta)(2 + 2\sin\theta\cos\theta) \\ &= (1 - 2t)(2 + 2t) = 2(1 + t)(1 - 2t) \end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{L = \sqrt{2(1+t)(1-2t)}}$

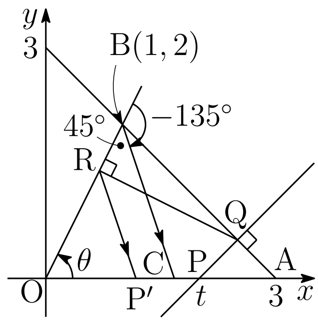
(4) (3) の結果から $\quad L^2 = -4t^2 - 2t + 2 = -4\left(t + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{9}{4}$

上式および $(*)$ より L は

$t = -\dfrac{1}{4}$，すなわち，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{11}{12}\pi}$ のとき最大値 $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

$t = -\dfrac{1}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{3}{4}\pi}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 点 P$(t,\ 0)$ を通り，傾きが 1 の直線は



$$y = x - t$$

2 点 A$(3,\ 0)$，B$(1,\ 2)$ を通る直線は

$$y = -x + 3$$

この 2 直線の交点 Q は $\left(\boldsymbol{\dfrac{3+t}{2},\ \dfrac{3-t}{2}}\right)$

(2) 点 Q$\left(\dfrac{3+t}{2},\ \dfrac{3-t}{2}\right)$ を通り，直線 OB に垂直な直線は

$$y - \frac{3-t}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3+t}{2}\right) \quad ゆえに \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{9-t}{4}$$

これと直線 OB : $y = 2x$ との交点 R は $\left(\boldsymbol{\dfrac{9-t}{10},\ \dfrac{9-t}{5}}\right)$

(3) 直線 OB と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると $\tan\theta = 2$

直線 BC の傾きは $\tan(\theta - 135^\circ) = \dfrac{\tan\theta - \tan 135^\circ}{1 + \tan\theta \tan 135^\circ} = \dfrac{2-(-1)}{1+2\cdot(-1)} = -3$

点 R$\left(\dfrac{9-t}{10},\ \dfrac{9-t}{5}\right)$ を通り，直線 BC と平行な直線は

$$y - \frac{9-t}{5} = -3\left(x - \frac{9-t}{10}\right) \quad ゆえに \quad y = -3x + \frac{9-t}{2}$$

この直線と直線 OA の交点 P′ は $\left(\boldsymbol{\dfrac{9-t}{6},\ 0}\right)$

(4) (3) の結果より，P′ の x 座標が $f(t)$ であるから $f(t) = \dfrac{9-t}{6}$

$t_{n+1} = f(t_n)$ より $t_{n+1} = \dfrac{9-t_n}{6}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

したがって $t_{n+1} - \dfrac{9}{7} = -\dfrac{1}{6}\left(t_n - \dfrac{9}{7}\right)$

数列 $\left\{t_n - \dfrac{9}{7}\right\}$ は初項 $t_1 - \dfrac{9}{7} = 2 - \dfrac{9}{7} = \dfrac{5}{7}$，公比 $-\dfrac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$t_n - \frac{9}{7} = \left(t_1 - \frac{9}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \quad よって \quad \boldsymbol{t_n = \frac{9}{7} + \frac{5}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) X が 5 の倍数となる事象を A とすると

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \mathbf{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{\boldsymbol{n}}}$$

(2) (1) の結果を利用して　$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0.99$　ゆえに　$\left(\frac{6}{5}\right)^n > 100$

2 を底とする対数をとると　$n \log_2 \frac{6}{5} > \log_2 100$

したがって　$n(1 + \log_2 3 - \log_2 5) > 2(1 + \log_2 5)$

$$n > \frac{2(1 + \log_2 5)}{1 + \log_2 3 - \log_2 5}$$

$$\frac{2(1 + \log_2 5)}{1 + \log_2 3 - \log 25} = \frac{2(1 + 2.322)}{1 + 1.585 - 2.322} = \frac{6.644}{0.263} \fallingdotseq 25.2\cdots$$

よって，求める最小の整数 n は　**26**

(3) X が 3 の倍数となる事象を B とすると，求める確率は

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n}}$$

(4) (3) の結果から　$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

したがって　$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$P(\overline{B}) = \left(\frac{4}{6}\right)^n$　ゆえに　$P(B) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

よって X が 15 の倍数である確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ &= \mathbf{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\boldsymbol{n}} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\boldsymbol{n}} - \left(\frac{5}{6}\right)^{\boldsymbol{n}}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $C_1 : y = 4x^3 - 1$ と $C_2 : y = x^3$ の交点の x 座標が p であるから

$$4p^3 - 1 = p^3 \quad ゆえに \quad p^3 = \frac{1}{3} \quad よって \quad \boldsymbol{p = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$$

(2) $y = 4x^3 - 1$ を微分すると　$y' = 12x^2$

C_1 上の点 $(a,\ 4a^3 - 1)$ における接線 l の方程式は

$$y - (4a^3 - 1) = 12a^2(x - a) \quad すなわち \quad \boldsymbol{y = 12a^2x - 8a^3 - 1}$$

(3) $y = x^3$ を微分すると　$y' = 3x^2$

l と C_2 との接点の x 座標を t とすると，接線の傾きと y 座標により

$$\begin{cases} 3t^2 = 12a^2 & \cdots ① \\ t^3 = 12a^2t - 8a^3 - 1 & \cdots ② \end{cases}$$

① から　$t^2 = 4a^2$　ゆえに　$t = \pm 2a$

(i) $t = 2a$ を ② に代入すると　$(2a)^3 = 12a^2 \cdot 2a - 8a^3 - 1$

整理すると　$8a^3 = 1$　ゆえに　$a = \dfrac{1}{2}$，$t = 1$

(ii) $t = -2a$ を ② に代入すると　$(-2a)^3 = 12a^2 \cdot (-2a) - 8a^3 - 1$

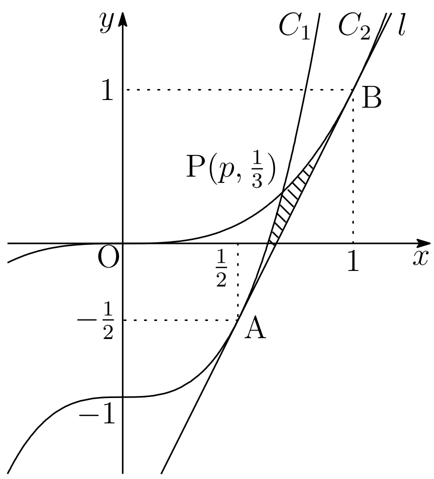
整理すると　$24a^3 = -1$　これは $a > 0$ であることに反するので不適

よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$

(4) 2 点 A，B の x 座標は，それぞれ $\dfrac{1}{2}$，1

(2),(3) の結果から　$l : y = 3x - 2$

求める面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^{p} (4x^3 - 1)\,dx + \int_{p}^{1} x^3\,dx \\ &\qquad - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (3x - 2)\,dx \\ &= \Big[\ x^4 - x\ \Big]_{\frac{1}{2}}^{p} + \Big[\ \frac{1}{4}x^4\ \Big]_{p}^{1} \\ &\qquad - \Big[\ \frac{3}{2}x^2 - 2x\ \Big]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \frac{3}{4}p^4 - p + \frac{9}{16} \end{aligned}$$

$p^4 = p^3p = \dfrac{1}{3}p$ に注意して　　$S = -\dfrac{3}{4}p + \dfrac{9}{16} = \boldsymbol{-\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}} + \dfrac{9}{16}}$