平成 28 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・
経済 (昼)・歯 (航空健康科学 (口腔保健))

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を正の定数とし，座標平面上において，

$$\text{円 } C_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad \text{放物線 } C_2 : y = ax^2 + 1$$

を考える．C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ における C_1 の接線 ℓ は点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ で C_2 に接している．次の問いに答えよ．

(1) s，t および a を求めよ．

(2) C_2，ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) 円 C_1 上の点が点 P から点 $\mathrm{R}(0,\ 1)$ まで反時計回りに動いてできる円弧を C_3 とする．C_2，ℓ および C_3 で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 四角形 ABCD において，

$$\angle\mathrm{DAB} = \angle\mathrm{DBC} = 90^\circ, \quad \angle\mathrm{BCD} = 60^\circ, \quad \mathrm{AB} = \mathrm{AD}, \quad \mathrm{BC} = 1$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) 対角線 BD の長さの 2 乗 BD^2 を求めよ．

(2) 対角線 AC の長さの 2 乗 AC^2 を求めよ．

(3) $\angle\mathrm{BAC} = \alpha$，$\angle\mathrm{ACD} = \beta$ とおくとき，$\cos^2\alpha$，$\cos^2\beta$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標空間に 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(s,\ s,\ s),\ \mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$$

がある．ただし，$s>0$ とする．t，u，v を実数とし，

$$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ のとき，t を s を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$ のとき，u，v を s を用いて表せ．

(3) (2) のとき，2 点 D，E を

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$$

となる点とする．四面体 OADE の体積が 2 であるとき，s の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり，次の試行を行う．

1 枚の硬貨を投げ，表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く．ただし，点 $(3,\ 1)$ に到達したら Q は原点に戻る．

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となる確率を求めよ．

(2) $(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となる確率を求めよ．

(3) $x_8+y_8\leqq 4$ となる確率を求めよ．

(4) $x_{4n}+y_{4n}\leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ．ここで k は n 以下の自然数とする．

5 n を 2 以上の自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) 変量 x のデータの値が x_1，x_2，$\cdots$，x_n であるとし，

$$f(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$$

とする．$f(a)$ を最小にする a は x_1，x_2，$\cdots$，x_n の平均値で，そのときの最小値は x_1，x_2，$\cdots$，x_n の分散であることを示せ．

(2) c を定数として，変量 y，z の k 番目のデータの値が

$$\begin{aligned} y_k &= k \quad (k=1,2,\cdots,n) \\ z_k &= ck \quad (k=1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

であるとする．このとき y_1，y_2，$\cdots$，y_n の分散が z_1，z_2，$\cdots$，z_n の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ．

(3) 変量 x のデータの値が x_1，x_2，$\cdots$，x_n であるとし，その平均値を $\overline{x}$ とする．新たにデータを得たとし，その値を x_{n+1} とする．x_1，x_2，$\cdots$，x_n，x_{n+1} の平均値を x_{n+1}，$\overline{x}$ および n を用いて表せ．

(4) 次の 40 個のデータの平均値，分散，中央値を計算すると，それぞれ，ちょうど 40，670，35 であった．

120	10	60	70	30	20	20	30	20	60
40	50	40	10	30	40	40	30	20	70
100	20	20	40	40	60	70	20	50	10
30	10	50	80	10	30	70	10	60	10

新たにデータを得たとし，その値が 40 であった．このとき，41 個のすべてのデータの平均値，分散，中央値を求めよ．ただし，得られた値が整数でない場合は，小数第 1 位を四捨五入せよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $C_1 : x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ における接線 ℓ の方程式は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=1 \quad \text{すなわち} \quad y=\sqrt{3}x-2$$

点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ は C_2 上の点であるから，$\mathrm{Q}(s,\ as^2+1)$
$C_2 : y=ax^2+1$ を微分すると　$y'=2ax$
C_2 上の点 Q における接線の方程式は

$$y-(as^2+1)=2as(x-s) \quad \text{ゆえに} \quad y=2asx-as^2+1$$

これが ℓ に一致するから

$$\begin{cases} 2as=\sqrt{3} \\ -as^2+1=-2 \end{cases} \qquad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=\frac{1}{4},\ s=2\sqrt{3}}$$

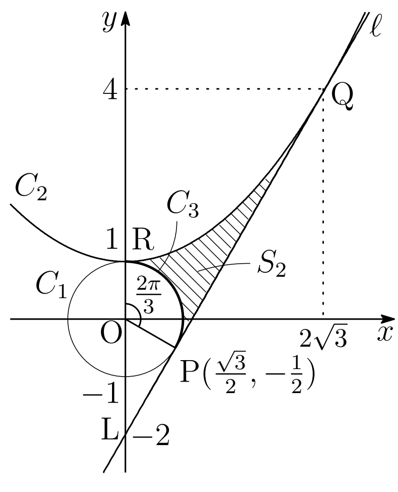
また　　$t=as^2+1=\dfrac{1}{4}(2\sqrt{3})^2+1=\mathbf{4}$

(2) (1) の結果より，$C_2 : y=\dfrac{1}{4}x^2+1$ であるから，求める面積を S_1 とすると

$$S_1=\int_0^{2\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{4}x^2+1-(\sqrt{3}x-2)\right\}dx=\frac{1}{4}\int_0^{2\sqrt{3}}(x-2\sqrt{3})^2\,dx$$
$$=\frac{1}{12}\Big[\,(x-2\sqrt{3})^3\,\Big]_0^{2\sqrt{3}}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$$

(3) ℓ と y 軸との交点を L とし，求める面積を S_2 とすると，$\angle\mathrm{POR}=\dfrac{2}{3}\pi$ であるから

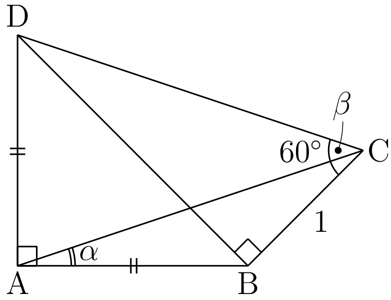
$$S_2=S_1-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{2\pi}{3}-\triangle\mathrm{OLP}$$
$$=2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}}$$



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 直角三角形 BCD に着目すると

$$\mathrm{BD} = \mathrm{BC}\tan 60^\circ = 1\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{BD^2 = 3}$$

(2) 直角二等辺三角形 ABD に着目すると



$$\mathrm{AB} = \mathrm{BD}\cos 45^\circ = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

△ABC に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 1^2 - 2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 1\cos 135^\circ \\ &= \mathbf{\frac{5}{2} + \sqrt{3}}\end{aligned}$$

(3) △ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}} = \frac{\frac{3}{2} + \left(\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right) - 1}{2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{AC}} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}\mathrm{AC}}$$

したがって

$$\cos^2\alpha = \frac{(3+\sqrt{3})^2}{6\mathrm{AC}^2} = \frac{6(2+\sqrt{3})}{3(5+2\sqrt{3})} = \mathbf{\frac{2}{13}(4+\sqrt{3})}$$

△ACD に余弦定理を適用すると

$$\cos\beta = \frac{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{CD}^2 - \mathrm{AD}^2}{2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CD}} = \frac{\left(\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right) + 4 - \frac{3}{2}}{4\mathrm{AC}} = \frac{5+\sqrt{3}}{4\mathrm{AC}}$$

したがって

$$\cos^2\beta = \frac{(5+\sqrt{3})^2}{16\mathrm{AC}^2} = \frac{2(14+5\sqrt{3})}{8(5+2\sqrt{3})} = \mathbf{\frac{1}{52}(40-3\sqrt{3})}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(s,\ s,\ s),\ \mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= s(1,\ 1,\ 1),\\ \vec{d} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - t\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1,\ 1,\ 1) - t(s,\ s,\ s)\\ &= (-1-st,\ 1-st,\ 1-st)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{d}=0$ であるから $(s>0)$，

$$1(-1-st)+1(1-st)+1(1-st)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t=\frac{1}{3s}}$$

(2) (1) の結果から，$st=\dfrac{1}{3}$ より $\quad \vec{d}=\left(-1-\dfrac{1}{3},\ 1-\dfrac{1}{3},\ 1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}(-2,\ 1,\ 1)$

$$\begin{aligned}\vec{e} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} - u\overrightarrow{\mathrm{OA}} - v\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (0,\ 0,\ 1) - u(s,\ s,\ s) - v(-1,\ 1,\ 1)\\ &= (-us+v, -us-v,\ 1-us-v)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e},\ \vec{d}\perp\vec{e}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{e}=0,\ \vec{d}\cdot\vec{e}=0$ であるから

$$\begin{aligned}1(-us+v)+1(-us-v)+1(1-us-v)&=0,\\ -2(-us+v)+1(-us-v)+1(1-us-v)&=0\end{aligned}$$

整理すると $\begin{cases}-3us-v+1=0\\ -4v+1=0\end{cases}$ よって $\boldsymbol{u=\dfrac{1}{4s},\ v=\dfrac{1}{4}}$

(3) (2) の結果から，$su=v=\dfrac{1}{4}$ であるから

$$\vec{e}=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}, 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}(0,-1.\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

このとき，四面体OADEの体積が2であるから，$\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}||\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=2$ より

$$\frac{1}{6}\cdot s\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{s=6}$$

解説

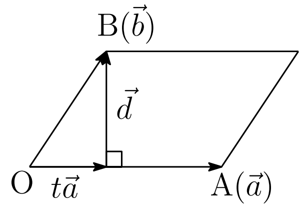
座標空間に 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3),\ \mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$$

があるとき，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．

$\vec{d} = \vec{b} - t\vec{a}$ が $\vec{a} \perp \vec{d}$ であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{d} = 0$ より

$$\vec{a}\cdot(\vec{b} - t\vec{a}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{b}$$



$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S^2 &= (|\vec{a}||\vec{d}|)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b} - t\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2(|\vec{b}|^2 - 2t\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2|\vec{a}|^2) \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - 2t|\vec{a}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + (t|\vec{a}|^2)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \end{aligned}$$

$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ であるから

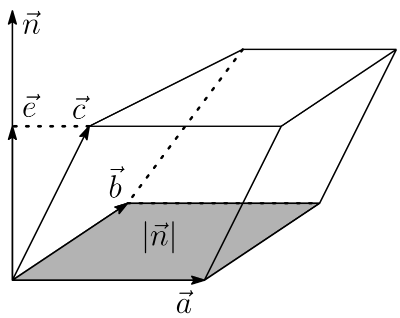
$$\begin{aligned} S^2 &= ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \end{aligned}$$

ここで，$\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$ とおくと

$$|\vec{n}| = S, \quad \vec{n}\cdot\vec{a} = 0, \quad \vec{n}\cdot\vec{b} = 0$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および $\vec{n}$ に平行なベクトル $\vec{e}$ を用いて

$$\vec{c} = \vec{e} + u\vec{a} + v\vec{b} \quad (u,\ v \text{ は定数})$$



とかける．このとき

$$\vec{n}\cdot\vec{e} = \vec{n}\cdot(\vec{c} - u\vec{a} - v\vec{b}) = \vec{n}\cdot\vec{c}$$

$\vec{n}$ と $\vec{e}$ のなす角は 0° または 180° であるから　$|\vec{n}\cdot\vec{e}| = |\vec{n}||\vec{e}|$

この平行六面体の体積を V とすると，$V = |\vec{n}||\vec{e}|$ であるから

$$V = |\vec{n}\cdot\vec{e}| = |\vec{n}\cdot\vec{c}| = |(a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3|$$

よって，四面体 OABC の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}S\cdot|\vec{e}| = \dfrac{1}{6}|\vec{n}||\vec{e}| = \dfrac{1}{6}V$ より

$$\frac{1}{6}|(a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3|$$

4 (1) $(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となるのは，硬貨を 4 回投げて，表が 3 回，裏が 1 回出る確率であるから

$$ {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\boldsymbol{\frac{1}{4}} $$

(2) $(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となるのは，点 $(3,1)$ を通らずに，点 $(5,\ 3)$ に到達する確率であるから，(1) の結果を利用して

$$ {}_8\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^8-\frac{1}{4}\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{7}{32}-\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}=\boldsymbol{\frac{1}{8}} $$

(3) $x_8+y_8\leqq 4$ となるのは，4 回目に点 $(3,\ 1)$ に到達することである．したがって，(1) の結果から，求める確率は

$$ \boldsymbol{\frac{1}{4}} $$

(4) $x_{4n}+y_{4n}\leqq 4k$ となるのは，4 回目，8 回目，$\cdots$，$4(n-k)$ 回目に点 $(3,\ 1)$ に到達する，すなわち，ちょうど $n-k$ 回原点に戻る．よって，(1) の結果から，求める確率は

$$ \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}=\boldsymbol{\frac{1}{4^{n-k}}} $$

5 (1) $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の平均を $\overline{x}$ とすると

$$ \begin{aligned} f(a)&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2-2a\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a^2\\ &=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2-2a\overline{x}+a^2=(a-\overline{x})^2+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2-\overline{x}^2 \end{aligned} $$

$f(a)$ は，$a=\overline{x}$ のとき，最小値 $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2-\overline{x}^2$ をとる．これは $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の分散である．

(2) $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ の平均を $\overline{y}$ とし，${y_1}^2,\ {y_2}^2,\ \cdots,\ {y_n}^2$ の平均を $\overline{y^2}$ とすると

$$ \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}(n+1), $$

$$ \overline{y^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1) $$

$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ の分散は

$$ \overline{y^2}-\overline{y}^2=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)-\left\{\frac{1}{2}(n+1)\right\}^2=\frac{1}{12}(n+1)(n-1) $$

z_1，z_2，$\cdots$，z_n の平均を $\overline{z}$ とし，${z_1}^2$，${z_2}^2$，$\cdots$，${z_n}^2$ の平均を $\overline{z^2}$ とすると，$z_k = cy_k$ であるから

$$\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k = c\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = c\overline{y},$$
$$\overline{z^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {z_k}^2 = c^2\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {y_k}^2 = c^2\overline{y^2}$$

z_1，z_2，$\cdots$，z_n の分散は

$$\overline{z^2} - \overline{z}^2 = c^2\overline{y^2} - (c\overline{y}) = c^2(\overline{y^2} - \overline{y}^2)$$

$n \geqq 2$ より，$\overline{y^2} - \overline{y}^2 > 0$ であるから，条件を満たす c の範囲は

$$c^2 < 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-1 < c < 1}$$

(3) $\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k$ より，求める平均は

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{n+1}\left(n\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right) = \boldsymbol{\frac{n\overline{x} + x_{n+1}}{n+1}}$$

(4) (3) の結果を利用すると，平均値は

$$\frac{40\overline{x} + x_{41}}{41} = \frac{40\cdot 40 + 40}{41} = \mathbf{40}$$

$\frac{1}{40}(x_k - 40)^2 = 670$ および $x_{41} = 40$ より，分散は

$$\frac{1}{41}\sum_{k=1}^{41}(x_k - 40)^2 = \frac{1}{41}\left\{\sum_{k=1}^{40}(x_k - 40)^2 + (x_{41} - 40)^2\right\}$$
$$= \frac{40}{41}\cdot\frac{1}{40}\sum_{k=1}^{40}(x_k - 40)^2 = \frac{40}{41} \times 670 \fallingdotseq 653.6\cdots$$

よって，分散は　**654**

40 個のデータで中央値 35 に一致するデータ 35 は存在しないので，小さい方から 20 番目が 30 で，21 番目が 40 である．したがって，データ 40 を追加したとき，これら 41 個のデータについて，小さい方から 21 番目に該当する，すなわち，中央値は **40** である．