平成 27 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・経済 (昼)・歯 (口腔健康科学 (口腔保健))

問題 1 2 3 4 5

1 a，b，c を実数とし，$a<1$ とする．座標平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = x^2 - x, \quad C_2 : y = x^3 + bx^2 + cx - a$$

を考える．C_1 と C_2 は，点 P(1, 0) と，それとは異なる点 Q を通る．また，点 P における C_1 と C_2 の接線の傾きは等しいものとする．点 P における C_1 の接線を ℓ_1，点 Q における C_1 の接線を ℓ_2，点 Q における C_2 の接線を ℓ_3 とする．次の問いに答えよ．

(1) b，c および点 Q の座標を a を用いて表せ．

(2) ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 が三角形をつくらないような a の値を求めよ．

(3) ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 が直角三角形をつくるような a の値の個数を求めよ．

2 n を自然数とし，p_n，q_n を実数とする．ただし，p_1，q_1 は ${p_1}^2 - 4q_1 = 4$ を満たすとする．2 次方程式 $x^2 - p_n x + q_n = 0$ は異なる実数解 α_n，β_n をもつとする．ただし，$\alpha_n < \beta_n$ とする．$c_n = \beta_n - \alpha_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n})$ とするとき，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n，r_{n+1} を用いて表せ．

(2) c_n を n の式で表せ．

(3) $p_n = n\sqrt{n}$ であるとき，q_n を n の式で表せ．

3 座標平面上に原点 O と 2 点 A(1, 0)，B(0, 1) をとり，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．点 C は $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1$，$0^\circ < \angle\mathrm{AOC} < 90^\circ$，$0^\circ < \angle\mathrm{BOC} < 90^\circ$ を満たすとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = t$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ．

(2) 線分 AB と線分 OC の交点を D とする．$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ．

(3) 点 C から線分 OA に引いた垂線と線分 AB の交点を E とする．D は (2) で定めた点とする．このとき，△OBD と △CDE の面積の和を t を用いて表せ．

4 α，β は $\alpha > 0$，$\beta > 0$，$\alpha + \beta < 1$ を満たす実数とする．三つの放物線

$$C_1 : y = x(1-x), \quad C_2 : y = x(1-\beta-x), \quad C_3 : y = (x-\alpha)(1-x)$$

を考える．C_2 と C_3 の交点の x 座標を γ とする．また，C_1，C_2，C_3 で囲まれた図形の面積を S とする．次の問いに答えよ．

(1) γ を α，β を用いて表せ．

(2) S を α，β を用いて表せ．

(3) α，β が $\alpha + \beta = \dfrac{1}{4}$ を満たしながら動くとき，S の最大値を求めよ．

5 n を自然数とする．A，B，C，D，E の 5 人が 1 個のボールをパスし続ける．最初に A がボールを持っていて，A は自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし，ボールを受けた人は，また自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし，以後同様にパスを続ける．n 回パスしたとき，B がボールを持っている確率を p_n とする．ここで，たとえば，A $\to$ C $\to$ D $\to$ A $\to$ E の順にボールをパスすれば，4 回パスしたと考える．次の問いに答えよ．

(1) p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ．

(2) p_n を求めよ．

解答例

1 (1) $f(x)=x^2-x$，$g(x)=x^3+bx^2+cx-a$ とおくと

$$f'(x)=2x-1,\quad g'(x)=3x^2+2bx+c$$

このとき，$g(1)=0$，$g'(1)=f'(1)$ であるから

$$1+b+c-a=0,\quad 3+2b+c=1$$

上の 2 式から　$\boldsymbol{b=-a-1,\ c=2a}$

$C_1: y=x^2-x$，$C_2: y=x^3-(a+1)x^2+2ax-a$ から y を消去すると

$$x^3-(a+1)x^2+2ax-a=x^2-x \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)^2(x-a)=0$$

$a<1$ であるから，点 P(1, 0) と異なる C_1，C_2 の交点 Q は　$\boldsymbol{(a,\ a^2-a)}$

(2) ℓ_1 は点 P(1, 0) を通り，傾き 1 の直線であるから　$\ell_1: y=x-1$

ℓ_2 の傾きは　$f'(a)=2a-1$

ℓ_3 の傾きは　$g'(a)=3a^2-2(a+1)a+2a=a^2$

ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 が三角形をつくらないのは，これら 3 本の直線のうち少なくとも 2 本が平行であるか，3 本の直線が 1 点で交わるときである．

(i) $a<1$ より，$f'(a)=2a-1<1$ であるから　$\ell_1 \not\parallel \ell_2$

(ii) $a<1$ より，$g'(a)-f'(a)=(a-1)^2\neq 0$ であるから　$\ell_2 \not\parallel \ell_3$

(iii) $\ell_3 /\!/ \ell_1$ のとき　$a^2=1$　このとき $a<1$ に注意して　$a=-1$

(iv) 3 直線が 1 点で交わるとき，すなわち，ℓ_1 が点 Q を通るとき

$$a^2-a=a-1 \quad \text{ゆえに} \quad (a-1)^2=0$$

$a<1$ であるから，これを満たす a は存在しない．

(i)〜(iv) より，求める a の値は　$\boldsymbol{a=-1}$

(3) ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 が直角三角形をつくるのは，これらの 3 本のうち 2 本だけが垂直である場合であり，(2) の結果より，$a \neq -1$ に注意する．

(i) $\ell_1 \perp \ell_2$ のとき　$1 \cdot (2a-1) = -1$　すなわち　$a = 0$

(ii) $\ell_2 \perp \ell_3$ のとき　$(2a-1) \cdot a^2 = -1$　整理すると　$2a^3 - a^2 + 1 = 0$

$h(a) = 2a^3 - a^2 + 1$ とおくと　$h'(a) = 6a^2 - 2a = 2a(3a-1)$

a	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$h'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(a)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{26}{27}$	$\nearrow$

$h(-1) = -2 \neq 0$ であるから，$h(a) = 0$ を満たす a が，$-1 < a < 0$ の範囲に唯一存在する．

(iii) $\ell_3 \perp \ell_1$ のとき　$a^2 \cdot 1 = -1$　これを満たす実数 a は存在しない．

(i)〜(iii) から，求める a の個数は　**2 個**　■

2 (1) $r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n}) = \log_2 \sqrt{n}(n+1)$ より

$$\sqrt{n}(n+1) = 2^{r_n} \quad \text{さらに} \quad \sqrt{n+1}(n+2) = 2^{r_{n+1}}$$

よって　$$\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{(n+2)\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}(n+1)} = \boldsymbol{\frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}}}$$

(2) $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ であるから，(1) の結果より

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{c_{n+1}}{2^{r+1}} = \frac{c_n}{2^{r_n}}$$

ここで，$c_1 = \sqrt{{p_1}^2 - 4q_1} = 2$，$r_1 = \log_2 2 = 1$ であるから

$$\frac{c_n}{2^{r_n}} = \frac{c_1}{2^{r_1}} = \frac{2}{2^1} = 1 \quad \text{よって} \quad c_n = 2^{r_n} = \boldsymbol{\sqrt{n}(n+1)}$$

(3) $x^2 - p_n x + q_n = 0$ の異なる 2 つの実数解が α_n，β_n であるから $(\alpha_n < \beta_n)$

$$\alpha_n = \frac{p_n - \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n}}{2}, \quad \beta_n = \frac{p_n + \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n}}{2}$$

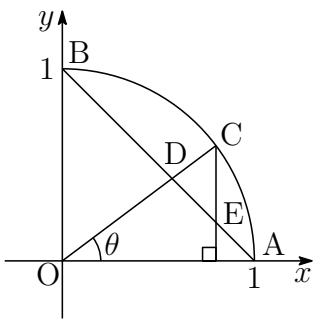
したがって　$c_n = \beta_n - \alpha_n = \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n}$　ゆえに　${c_n}^2 = {p_n}^2 - 4q_n$

これに (2) の結果および $p_n = n\sqrt{n}$ を代入すると

$$n(n+1)^2 = n^3 - 4q_n \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{q_n = -\frac{2n^2+n}{4}}$$

■

3 (1) 与えられた条件により，点 C は原点を中心とする単位円周上の第 1 象限にある．OC の x 軸の正の向きとなす角を θ とすると $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$



$$\mathrm{C}(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t$ であるから　$\cos\theta = t$

ゆえに　$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-t^2}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \cos\theta(1,\ 0) + \sin\theta(0,\ 1)$

$$= \boldsymbol{t\vec{a} + \sqrt{1-t^2}\,\vec{b}}$$

(2) 点 D は，直線 OC : $y = x\tan\theta$ と直線 AB : $y = -x+1$ の交点であるから

$$\left(\frac{1}{1+\tan\theta},\ \frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta},\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\left\{(\cos\theta)\vec{a} + (\sin\theta)\vec{b}\right\}$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}(t\vec{a} + \sqrt{1-t^2}\,\vec{b})}$$

(3) $\triangle\mathrm{OBD} \backsim \triangle\mathrm{CED}$ であるから，(1)，(2) の結果から

$$\mathrm{OD} : \mathrm{OC} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta} : \cos\theta = 1 : \cos\theta+\sin\theta$$

その相似比は　$\mathrm{OD} : \mathrm{DC} = 1 : \cos\theta+\sin\theta-1$

$$\triangle\mathrm{OBD} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{2(\cos\theta+\sin\theta)}$$

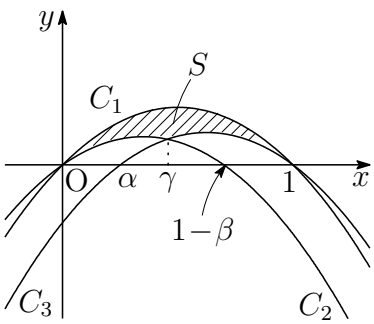
求める面積を S とすると

$$S = \frac{\cos\theta}{2(\cos\theta+\sin\theta)}\left\{1+(\cos\theta+\sin\theta-1)^2\right\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{t\{1+(t+\sqrt{1-t^2}-1)^2\}}{2(t+\sqrt{1-t^2})}}$$

■

4 (1) C_2，C_3 の方程式から y を消去すると



$$x(1-\beta-x)=(x-\alpha)(1-x)$$

整理すると　　$(\alpha+\beta)x=\alpha$

$\alpha>0$，$\beta>0$ より，$\alpha+\beta\neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{\gamma=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

(2) S は，右上の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\gamma}\{x(1-x)-x(1-\beta-x)\}\,dx\\&\qquad+\int_{\gamma}^{1}\{x(1-x)-(x-\alpha)(1-x)\}\,dx\\&=\beta\int_0^{\gamma}x\,dx-\alpha\int_{\gamma}^{1}(x-1)\,dx\\&=\beta\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\gamma}-\alpha\left[\frac{1}{2}(x-1)^2\right]_{\gamma}^{1}=\frac{1}{2}\beta\gamma^2+\frac{1}{2}\alpha(\gamma-1)^2\\&=\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2+\frac{1}{2}\alpha\left(1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2\\&=\frac{\alpha^2\beta}{2(\alpha+\beta)^2}+\frac{\alpha\beta^2}{2(\alpha+\beta)^2}=\boldsymbol{\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}}\end{aligned}$$

(3) $\alpha+\beta=\dfrac{1}{4}$ のとき，$\beta=\dfrac{1}{4}-\alpha>0$ より，$0<\alpha<\dfrac{1}{4}$ であるから

$$S=\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}=2\alpha\beta=2\alpha\left(\frac{1}{4}-\alpha\right)=-2\left(\alpha-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{32}$$

よって　$\alpha=\beta=\dfrac{1}{8}$ のとき，S は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{32}}$ をとる．

別解 $\alpha+\beta=\dfrac{1}{4}$ のとき，(2) の結果から　$S=2\alpha\beta$

$\alpha>0$，$\beta>0$ より，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\geqq\sqrt{\alpha\beta}\quad\text{ゆえに}\quad\sqrt{\alpha\beta}\leqq\frac{1}{8}$$

$\alpha\beta\leqq\dfrac{1}{64}$ であるから　$S=2\alpha\beta\leqq\dfrac{1}{32}$

よって　S は最大値 $\dfrac{1}{32}$　$\left(\alpha=\beta=\dfrac{1}{8}\right)$ ■

5 (1) n 回パスしたとき，A，B，C，D，E それぞれがボールを持っている確率を a_n，b_n，c_n，d_n，e_n とすると (n は自然数)

$$a_1 = 0,\quad b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = \frac{1}{4}$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(b_n + c_n + d_n + e_n)$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + c_n + d_n + e_n)$$
$$c_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + d_n + e_n)$$
$$d_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + c_n + e_n)$$
$$e_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + c_n + d_n)$$

$a_n + b_n + c_n + d_n + e_n = 1$ であるから，上の第 2 式より

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(1 - b_n) \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{4}\left(b_n - \frac{1}{5}\right)$$

数列 $\left\{b_n - \frac{1}{5}\right\}$ は，初項 $b_1 - \frac{1}{5}$，公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$b_n - \frac{1}{5} = \left(b_1 - \frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad b_n = \frac{1}{5}\left\{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

$p_n = b_n$ であるから　$p_n = \frac{1}{5}\left\{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$　$\cdots(*)$

$(*)$ より　$\boldsymbol{p_1 = \frac{1}{4},\ p_2 = \frac{3}{16},\ p_3 = \frac{13}{64},\ p_4 = \frac{51}{256}}$

(2) $(*)$ より　$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{5}\left\{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}}$ ■