

平成27年度 広島大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
 教育(第一類・第二類(技術・情報系)・第四類(人間生活系))・
 経済(昼)・歯(航空健康科学(口腔保健))

- 1 a, b, c を実数とし, $a < 1$ とする. 座標平面上の2曲線

$$C_1: y = x^2 - x, \quad C_2: y = x^3 + bx^2 + cx - a$$

を考える. C_1 と C_2 は, 点 $P(1, 0)$ と, それとは異なる点 Q を通る. また, 点 P における C_1 と C_2 の接線の傾きは等しいものとする. 点 P における C_1 の接線を l_1 , 点 Q における C_1 の接線を l_2 , 点 Q における C_2 の接線を l_3 とする. 次の問いに答えよ.

- (1) b, c および点 Q の座標を a を用いて表せ.
 (2) l_1, l_2, l_3 が三角形をつくらないような a の値を求めよ.
 (3) l_1, l_2, l_3 が直角三角形をつくるような a の値の個数を求めよ.
- 2 n を自然数とし, p_n, q_n を実数とする. ただし, p_1, q_1 は $p_1^2 - 4q_1 = 4$ を満たすとする. 2次方程式 $x^2 - p_n x + q_n = 0$ は異なる実数解 α_n, β_n をもつとする. ただし, $\alpha_n < \beta_n$ とする. $c_n = \beta_n - \alpha_n$ とおくと, 数列 $\{c_n\}$ は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする. 次の問いに答えよ.

- (1) $r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n})$ とするとき, $\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n, r_{n+1} を用いて表せ.
 (2) c_n を n の式で表せ.
 (3) $p_n = n\sqrt{n}$ であるとき, q_n を n の式で表せ.
- 3 座標平面上に原点 O と2点 $A(1, 0), B(0, 1)$ をとり, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とする. 点 C は $|\overrightarrow{OC}| = 1, 0^\circ < \angle AOC < 90^\circ, 0^\circ < \angle BOC < 90^\circ$ を満たすとする. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = t$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) \overrightarrow{OC} を \vec{a}, \vec{b}, t を用いて表せ.
 (2) 線分 AB と線分 OC の交点を D とする. \overrightarrow{OD} を \vec{a}, \vec{b}, t を用いて表せ.
 (3) 点 C から線分 OA に引いた垂線と線分 AB の交点を E とする. D は(2)で定めた点とする. このとき, $\triangle OBD$ と $\triangle CDE$ の面積の和を t を用いて表せ.

4 α, β は $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < 1$ を満たす実数とする. 三つの放物線

$$C_1 : y = x(1 - x), \quad C_2 : y = x(1 - \beta - x), \quad C_3 : y = (x - \alpha)(1 - x)$$

を考える. C_2 と C_3 の交点の x 座標を γ とする. また, C_1, C_2, C_3 で囲まれた図形の面積を S とする. 次の問いに答えよ.

(1) γ を α, β を用いて表せ.

(2) S を α, β を用いて表せ.

(3) α, β が $\alpha + \beta = \frac{1}{4}$ を満たしながら動くとき, S の最大値を求めよ.

5 n を自然数とする. A, B, C, D, E の 5 人が 1 個のボールをパスし続ける. 最初に A がボールを持っていて, A は自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし, ボールを受けた人は, また自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし, 以後同様にパスを続ける. n 回パスしたとき, B がボールを持っている確率を p_n とする. ここで, たとえば, $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E$ の順にボールをパスすれば, 4 回パスしたと考える. 次の問いに答えよ.

(1) p_1, p_2, p_3, p_4 を求めよ.

(2) p_n を求めよ.

解答例

1 (1) $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = x^3 + bx^2 + cx - a$ とおくと

$$f'(x) = 2x - 1, \quad g'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

このとき, $g(1) = 0$, $g'(1) = f'(1)$ であるから

$$1 + b + c - a = 0, \quad 3 + 2b + c = 1$$

上の2式から $b = -a - 1$, $c = 2a$

$C_1: y = x^2 - x$, $C_2: y = x^3 - (a+1)x^2 + 2ax - a$ から y を消去すると

$$x^3 - (a+1)x^2 + 2ax - a = x^2 - x \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)^2(x-a) = 0$$

$a < 1$ であるから, 点 $P(1, 0)$ と異なる C_1, C_2 の交点 Q は $(a, a^2 - a)$

(2) l_1 は点 $P(1, 0)$ を通り, 傾き 1 の直線であるから $l_1: y = x - 1$

l_2 の傾きは $f'(a) = 2a - 1$

l_3 の傾きは $g'(a) = 3a^2 - 2(a+1)a + 2a = a^2$

l_1, l_2, l_3 が三角形をつくらないのは, これら 3 本の直線のうち少なくとも 2 本が平行であるか, 3 本の直線が 1 点で交わる時である.

(i) $a < 1$ より, $f'(a) = 2a - 1 < 1$ であるから $l_1 \not\parallel l_2$

(ii) $a < 1$ より, $g'(a) - f'(a) = (a-1)^2 \neq 0$ であるから $l_2 \not\parallel l_3$

(iii) $l_3 \parallel l_1$ のとき $a^2 = 1$ このとき $a < 1$ に注意して $a = -1$

(iv) 3 直線が 1 点で交わる時, すなわち, l_1 が点 Q を通るとき

$$a^2 - a = a - 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a-1)^2 = 0$$

$a < 1$ であるから, これを満たす a は存在しない.

(i)~(iv) より, 求める a の値は $a = -1$

(3) l_1, l_2, l_3 が直角三角形をつくるのは、これらの3本のうち2本だけが垂直である場合であり、(2)の結果より、 $a \neq -1$ に注意する。

(i) $l_1 \perp l_2$ のとき $1 \cdot (2a - 1) = -1$ すなわち $a = 0$

(ii) $l_2 \perp l_3$ のとき $(2a - 1) \cdot a^2 = -1$ 整理すると $2a^3 - a^2 + 1 = 0$

$h(a) = 2a^3 - a^2 + 1$ とおくと $h'(a) = 6a^2 - 2a = 2a(3a - 1)$

a	\dots	0	\dots	$\frac{1}{3}$	\dots
$h'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(a)$	\nearrow	1	\searrow	$\frac{26}{27}$	\nearrow

$h(-1) = -2 \neq 0$ であるから、 $h(a) = 0$ を満たす a が、 $-1 < a < 0$ の範囲に唯一存在する。

(iii) $l_3 \perp l_1$ のとき $a^2 \cdot 1 = -1$ これを満たす実数 a は存在しない。

(i)~(iii) から、求める a の個数は **2個**

2 (1) $r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n}) = \log_2 \sqrt{n}(n+1)$ より

$$\sqrt{n}(n+1) = 2^{r_n} \quad \text{さらに} \quad \sqrt{n+1}(n+2) = 2^{r_{n+1}}$$

$$\text{よって} \quad \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{(n+2)\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}(n+1)} = \frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}}$$

(2) $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ であるから、(1)の結果より

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{c_{n+1}}{2^{r_{n+1}}} = \frac{c_n}{2^{r_n}}$$

ここで、 $c_1 = \sqrt{p_1^2 - 4q_1} = 2$ 、 $r_1 = \log_2 2 = 1$ であるから

$$\frac{c_n}{2^{r_n}} = \frac{c_1}{2^{r_1}} = \frac{2}{2^1} = 1 \quad \text{よって} \quad c_n = 2^{r_n} = \sqrt{n}(n+1)$$

(3) $x^2 - p_n x + q_n = 0$ の異なる2つの実数解が α_n, β_n であるから ($\alpha_n < \beta_n$)

$$\alpha_n = \frac{p_n - \sqrt{p_n^2 - 4q_n}}{2}, \quad \beta_n = \frac{p_n + \sqrt{p_n^2 - 4q_n}}{2}$$

したがって $c_n = \beta_n - \alpha_n = \sqrt{p_n^2 - 4q_n}$ ゆえに $c_n^2 = p_n^2 - 4q_n$

これに(2)の結果および $p_n = n\sqrt{n}$ を代入すると

$$n(n+1)^2 = n^3 - 4q_n \quad \text{よって} \quad q_n = -\frac{2n^2 + n}{4}$$

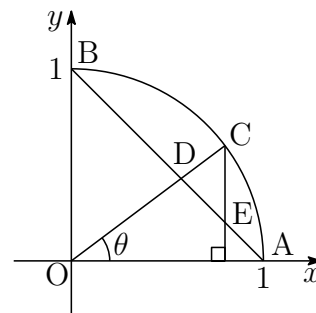
- 3 (1) 与えられた条件により、点Cは原点を中心とする単位円周上の第1象限にある。OCのx軸の正の向きとなす角を θ とすると($0^\circ < \theta < 90^\circ$)

$$C(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = t \text{ であるから } \cos \theta = t$$

$$\text{ゆえに } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - t^2}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \vec{OC} &= \cos \theta(1, 0) + \sin \theta(0, 1) \\ &= t\vec{a} + \sqrt{1 - t^2}\vec{b} \end{aligned}$$



- (2) 点Dは、直線OC: $y = x \tan \theta$ と直線AB: $y = -x + 1$ の交点であるから

$$\left(\frac{1}{1 + \tan \theta}, \frac{\tan \theta}{1 + \tan \theta} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta}, \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \vec{OD} &= \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \{ (\cos \theta)\vec{a} + (\sin \theta)\vec{b} \} \\ &= \frac{1}{t + \sqrt{1 - t^2}} (t\vec{a} + \sqrt{1 - t^2}\vec{b}) \end{aligned}$$

- (3) $\triangle OBD \sim \triangle CED$ であるから、(1), (2)の結果から

$$OD : OC = \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} : \cos \theta = 1 : \cos \theta + \sin \theta$$

$$\text{その相似比は } OD : DC = 1 : \cos \theta + \sin \theta - 1$$

$$\triangle OBD = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{2(\cos \theta + \sin \theta)}$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{\cos \theta}{2(\cos \theta + \sin \theta)} \{ 1 + (\cos \theta + \sin \theta - 1)^2 \} \\ &= \frac{t \{ 1 + (t + \sqrt{1 - t^2} - 1)^2 \}}{2(t + \sqrt{1 - t^2})} \end{aligned}$$

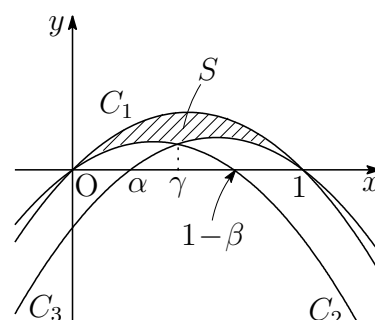
4 (1) C_2, C_3 の方程式から y を消去すると

$$x(1 - \beta - x) = (x - \alpha)(1 - x)$$

整理すると $(\alpha + \beta)x = \alpha$

$\alpha > 0, \beta > 0$ より, $\alpha + \beta \neq 0$ であるから

$$\gamma = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$



(2) S は, 右上の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\gamma} \{x(1-x) - x(1-\beta-x)\} dx \\ &\quad + \int_{\gamma}^1 \{x(1-x) - (x-\alpha)(1-x)\} dx \\ &= \beta \int_0^{\gamma} x dx - \alpha \int_{\gamma}^1 (x-1) dx \\ &= \beta \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\gamma} - \alpha \left[\frac{1}{2}(x-1)^2 \right]_{\gamma}^1 = \frac{1}{2}\beta\gamma^2 + \frac{1}{2}\alpha(\gamma-1)^2 \\ &= \frac{1}{2}\beta \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^2 + \frac{1}{2}\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^2 \\ &= \frac{\alpha^2\beta}{2(\alpha+\beta)^2} + \frac{\alpha\beta^2}{2(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

(3) $\alpha + \beta = \frac{1}{4}$ のとき, $\beta = \frac{1}{4} - \alpha > 0$ より, $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ であるから

$$S = \frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)} = 2\alpha\beta = 2\alpha \left(\frac{1}{4} - \alpha \right) = -2 \left(\alpha - \frac{1}{8} \right)^2 + \frac{1}{32}$$

よって $\alpha = \beta = \frac{1}{8}$ のとき, S は最大値 $\frac{1}{32}$ をとる.

別解 $\alpha + \beta = \frac{1}{4}$ のとき, (2) の結果から $S = 2\alpha\beta$

$\alpha > 0, \beta > 0$ より, 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{1}{8}$$

$\alpha\beta \leq \frac{1}{64}$ であるから $S = 2\alpha\beta \leq \frac{1}{32}$

よって S は最大値 $\frac{1}{32}$ ($\alpha = \beta = \frac{1}{8}$)

- 5 (1) n 回パスしたとき, A, B, C, D, E それぞれがボールを持っている確率を a_n, b_n, c_n, d_n, e_n とすると (n は自然数)

$$a_1 = 0, \quad b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = \frac{1}{4}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(b_n + c_n + d_n + e_n)$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + c_n + d_n + e_n)$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + d_n + e_n)$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + c_n + e_n)$$

$$e_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + c_n + d_n)$$

$a_n + b_n + c_n + d_n + e_n = 1$ であるから, 上の第2式より

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(1 - b_n) \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{4} \left(b_n - \frac{1}{5} \right)$$

数列 $\left\{ b_n - \frac{1}{5} \right\}$ は, 初項 $b_1 - \frac{1}{5}$, 公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$b_n - \frac{1}{5} = \left(b_1 - \frac{1}{5} \right) \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad b_n = \frac{1}{5} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^n \right\}$$

$$p_n = b_n \text{ であるから} \quad p_n = \frac{1}{5} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^n \right\} \quad \dots (*)$$

$$(*) \text{ より} \quad p_1 = \frac{1}{4}, \quad p_2 = \frac{3}{16}, \quad p_3 = \frac{13}{64}, \quad p_4 = \frac{51}{256}$$

$$(2) (*) \text{ より} \quad p_n = \frac{1}{5} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^n \right\}$$