平成 26 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
教育 (第一類・第ニ類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・経済 (昼)・歯 (航空健康科学 (口腔保健))

1 座標平面上で，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする．C の外部にある点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C にひいた 2 本の接線と C との接点を H，H$'$ とする．$\angle\mathrm{OPH} = \theta$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) PH の長さ，および $\sin\theta$ を a，b を用いて表せ．

(2) $\mathrm{HH}' = \mathrm{OP}$ となるような点 P の軌跡を求めよ．

2 a_1，a_2，a_3 は定数で，$a_1 > 0$ とする．放物線 $C : y = a_1x^2 + a_2x + a_3$ 上の点 $\mathrm{P}(2,\ 4a_1 + 2a_2 + a_3)$ における接線を ℓ とし，ℓ と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$，ℓ と y 軸との交点を $\mathrm{R}(0,\ a_4)$ とする．a_1，a_2，a_3，a_4 がこの順に等差数列であるとき，次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 を a_1 を用いて表せ．

(2) q の値を求めよ．

(3) 放物線 C，接線 ℓ，および y 軸で囲まれた部分の面積を S とする．$S = q$ となるとき，a_1 を求めよ．

3 四面体 OABC において，△OAB の重心を F，△OAC の重心を G とする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FG}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを示せ．

(3) $\mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 1$，$\angle\mathrm{BOC} = 90^\circ$ のとき，FG の長さを求めよ．

4 $\alpha > 1$ とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $a_n > 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(2) $\sqrt{x} - 1 \leqq \dfrac{1}{2}(x - 1) \qquad$ (ただし, $x > 1$ とする.)

(3) $a_n - 1 \leqq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha - 1) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 正六角形の頂点を反時計回りに P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6 とする．1個のさいころを2回投げて，出た目を順に j，k とする．次の問いに答えよ．

(1) P_1，P_j，P_k が異なる3点となる確率を求めよ．

(2) P_1，P_j，P_k が正三角形の3頂点となる確率を求めよ．

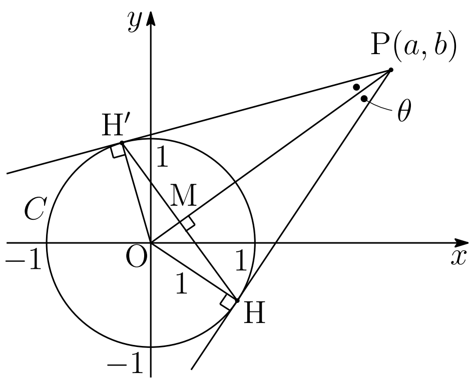
(3) P_1，P_j，P_k が直角三角形の3頂点となる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\mathrm{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$，$\mathrm{OH}=1$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{PH}&=\sqrt{\mathrm{OP}^2-\mathrm{OH}^2}\\&=\boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2-1}}\end{aligned}$$

また　$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OP}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2}}}$



(2) 線分 HH′ の中点を M とすると，(1) の結果を利用して

$$\mathrm{HM}=\mathrm{PH}\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2-1}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

したがって　　$\mathrm{HH'}=2\mathrm{HM}=\dfrac{2\sqrt{a^2+b^2-1}}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\mathrm{HH'}=\mathrm{OP}$ のとき，$\mathrm{HH'}^2-\mathrm{OP}^2=0$ より

$$\frac{4(a^2+b^2-1)}{a^2+b^2}-(a^2+b^2)=0$$

ゆえに
$$\begin{aligned}(a^2+b^2)^2-4(a^2+b^2)+4&=0\\(a^2+b^2-2)^2&=0\\a^2+b^2&=2\end{aligned}$$

よって，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の描く軌跡は，**原点を中心とする半径 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ の円**.

補足 直線 HH′ は，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を極とする極線[1]であるから，その方程式は

$$ax+by=1$$

原点 O から極線 HH′ までの距離 d は

$$d=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

したがって　　$\mathrm{HH'}=2\sqrt{1^2-d^2}=\dfrac{2\sqrt{a^2+b^2-1}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2012.pdf $\boxed{7}$ 参照.

2 (1) $y=a_1x^2+a_2x+a_3$ より　$y'=2a_1x+a_2$

$x=2$ のとき，$y'=4a_1+a_2$ より，点 $\mathrm{P}(2,\ 4a_1+2a_2+a_3)$ における接線は

$$y-(4a_1+2a_2+a_3)=(4a_1+a_2)(x-2)$$

したがって，ℓ の方程式は　$y=(4a_1+a_2)x-4a_1+a_3$

また，ℓ は，2 点 $\mathrm{Q}(q,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ a_4)$ を通るから，その方程式は

$$\frac{x}{q}+\frac{y}{a_4}=1 \quad \text{ゆえに} \quad y=-\frac{a_4}{q}x+a_4$$

これらの直線の方程式は一致するから

$$(*)\begin{cases} 4a_1+a_2=-\dfrac{a_4}{q} \\ -4a_1+a_3=a_4 \end{cases}$$

$(*)$ の第 2 式から　$a_4-a_3=-4a_1$

数列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ は等差数列であるから，公差を d とすると　$d=-4a_1$

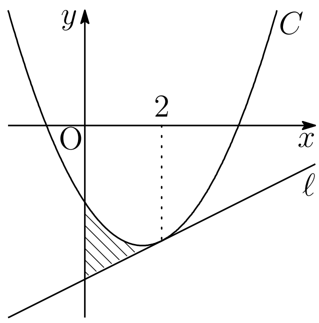
したがって

$$a_2=a_1+d=a_1+(-4a_1)=\boldsymbol{-3a_1}$$
$$a_3=a_1+2d=a_1+2(-4a_1)=\boldsymbol{-7a_1}$$
$$a_4=a_1+3d=a_1+3(-4a_1)=\boldsymbol{-11a_1}$$

(2) $(*)$ の第 1 式から　$q=-\dfrac{a_4}{4a_1+a_2}$

これに (1) の結果を代入して　$q=-\dfrac{-11a_1}{4a_1+(-3a_1)}=\boldsymbol{11}$

(3) (1) の結果から



$$C: y=a_1x^2-3a_1x-7a_1$$

$a_4=-11a_1$，$q=11$ から

$$\ell: y=a_1x-11a_1$$

$a>0$ であるから

$$S=\int_0^2\{(a_1x^2-3a_1x-7a_1)-(a_1x-11a_1)\}\,dx$$
$$=a_1\int_0^2(x-2)^2\,dx=a_1\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_0^2=\frac{8}{3}a_1$$

$S=q$ より　$\dfrac{8}{3}a_1=11$　これを解いて　$\boldsymbol{a_1=\dfrac{33}{8}}$　■

3 (1) $\overrightarrow{\mathbf{OF}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{OB}})$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})$ であるから，これと (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{FG}} &= \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \qquad \text{よって} \quad \overrightarrow{\mathrm{FG}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{BC}}\end{aligned}$$

(3) $\angle\mathrm{BOC} = 90^\circ$ より　$\mathrm{BC} = \sqrt{\mathrm{OB}^2 + \mathrm{OC}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

よって，(2) の結果から　$\mathrm{FG} = \dfrac{1}{3}\mathrm{BC} = \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}$ ■

4 (1) 漸化式

$$a_1 = \alpha > 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

より，$a_n > 0$．また，上式から　$a_{n+1}{}^2 - 1 = \dfrac{2a_n}{a_n + 1} - 1$

ゆえに　$a_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}(a_n - 1) \quad \cdots(*)$

したがって　$a_n - 1 > 0$ のとき　$a_{n+1} - 1 > 0$

$a_1 - 1 > 0$ であるから，すべての自然数 n について

$$a_n - 1 > 0 \quad \text{すなわち} \quad a_n > 1$$

(2) $\dfrac{1}{2}(x - 1) - (\sqrt{x} - 1) = \dfrac{1}{2}(x - 2\sqrt{x} + 1) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)^2 \geqq 0$

よって　$\sqrt{x} - 1 \leqq \dfrac{1}{2}(x - 1)$

(3) 漸化式および (2) の結果から

$$a_{n+1} - 1 = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}} - 1 \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{2a_n}{a_n + 1} - 1\right) = \frac{1}{2(a_n + 1)}(a_n - 1)$$

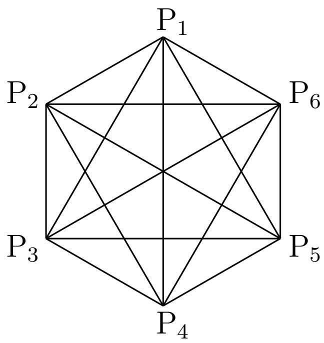
(1) の結果から　$\dfrac{1}{2(a_n + 1)} \leqq \dfrac{1}{4}$　ゆえに　$a_{n+1} - 1 \leqq \dfrac{1}{4}(a_n - 1)$

よって　$a_n - 1 \leqq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(a_1 - 1) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha - 1)$

別解 $a_n > 1$ から　$\dfrac{1}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)} \leqq \dfrac{1}{4}$　$(*)$ より　$a_{n+1} - 1 \leqq \dfrac{1}{4}(a_n - 1)$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) P_1，P_j，P_k が異なる 3 点となる場合の数，すなわち，$(j,\ k)$ の組の総数は，2，3，4，5，6 の 5 個から 2 個取り出して並べる順列の総数である．よって，求める確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{P}_2}{6^2} = \frac{5\cdot 4}{36} = \mathbf{\frac{5}{9}}$$



(2) $\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k$ が正三角形となるのは，次の 2 組である．

$$(j,\ k) = (3,\ 5),\ (5,\ 3)$$

よって，求める確率は　$\dfrac{2}{6^2} = \mathbf{\dfrac{1}{18}}$

(3) 正六角形の頂点は同一円周上の点であるから，$\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k$ が直角三角形となるとき，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_4$，$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_5$，$\mathrm{P}_3\mathrm{P}_6$ を辺にもつ場合で，それぞれの三角形の個数は，4，1，1 である．

よって，求める確率は　$\dfrac{(4+1+1)\times 2}{6^2} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$ ■