平成 25 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・経済 (昼)・歯 (航空健康科学 (口腔保健))

1 放物線 $y=2x^2-8$ を C とする．x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ $(a>0)$ を通り C と接する直線が 2 本あるとき，次の問いに答えよ．

(1) a の値の範囲を求めよ．

(2) 2 つの接点 P，Q の x 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とする．$\beta-\alpha=3$ のとき，a の値と 2 本の接線の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた 2 本の接線と C で囲まれた部分の面積を求めよ．

2 座標平面上に点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0<\theta<\pi)$ がある．原点を O とし，x 軸に関して点 A と対称な点を B とする．次の問いに答えよ．

(1) $-1<\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\leqq\dfrac{1}{2}$ となる θ の範囲を求めよ．

(2) 点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める．点 P から x 軸に下ろした垂線を PQ とする．θ が (1) で求めた範囲を動くとき，$\triangle\mathrm{POQ}$ の面積の最大値を求めよ．

3 関数 $f(x)=\log_2(x+1)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) 0 以上の整数 k に対して，$f(x)=\dfrac{k}{2}(f(1)-f(0))$ を満たす x を k を用いて表せ．

(2) (1) で求めた x を x_k とおく．$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(x_k-x_{k-1})$ を n を用いて表せ．

4 座標平面上で，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とし，2 点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(s,\ 0)$ を考える．2 点 P，Q を通る直線を ℓ とし，ℓ と C の交点のうち P ではないものを R とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 R の座標を s を用いて表せ．

(2) x 座標と y 座標がともに有理数である点を有理点という．s が有理数のとき，R は有理点であることを示せ．

5 座標平面上の点で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．n を 3 以上の自然数とし，連立不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad x + y \leqq n$$

の表す領域を D とする．格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して，領域 D 内の格子点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ が $|a-c|+|b-d|=1$ を満たすとき，点 B を点 A の隣接点という．次の問いに答えよ．

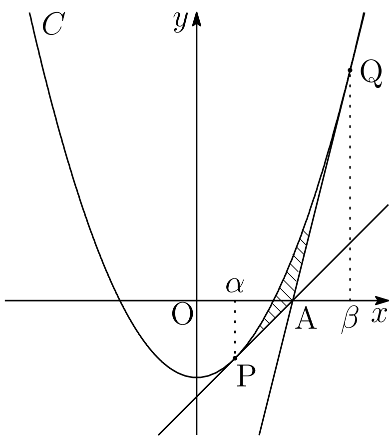
(1) 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ の隣接点をすべて求めよ．また，領域 D 内の格子点 P が直線 $x+y=n$ 上にあるとき，P の隣接点の個数を求めよ．

(2) 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ．

(3) 領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき，隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ．ただし，格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $C : y = 2x^2 - 8$ より　　$y' = 4x$



C 上の点 $(t,\ 2t^2-8)$ における接線の方程式は

$$y - (2t^2 - 8) = 4t(x - t)$$

すなわち　　$y = 4tx - 2t^2 - 8$　　$\cdots$①

この直線が点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を通るから

$$0 = 4ta - 2t^2 - 8$$

ゆえに　　$t^2 - 2at + 4 = 0$　　$\cdots(*)$

この 2 次方程式は異なる 2 つの実数解をもつから，係数について

$$D/4 = (-a)^2 - 1{\cdot}4 = a^2 - 4 > 0$$

$a > 0$ に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{a > 2}$

(2) $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ は方程式 $(*)$ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2a > 4,\quad \alpha\beta = 4$$

$\beta - \alpha = 3$ および上の 2 式との連立方程式を解くと

$$\alpha = 1,\quad \beta = 4,\quad \boldsymbol{a = \frac{5}{2}}$$

2 本の接線の方程式は，$t = 1,\ 4$ を ① に代入することにより

$$\boldsymbol{y = 4x - 10,\ y = 16x - 40}$$

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\frac{5}{2}} \{(2x^2-8) - (4x-10)\}dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 \{(2x^2-8) - (16x-40)\}dx \\ &= \int_1^{\frac{5}{2}} 2(x-1)^2\,dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 2(x-4)^2\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(x-1)^3\right]_1^{\frac{5}{2}} + \left[\frac{2}{3}(x-4)^3\right]_{\frac{5}{2}}^4 = \boldsymbol{\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

補足 $a = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$C$ と直線 PQ で囲まれた部分の面積を S_0 とすると[1]，$S = \dfrac{S_0}{2}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf $\boxed{4}$ を参照．

2 (1) $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ より，$\mathrm{B}(\cos\theta, -\sin\theta)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$

$-1 < \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} \leqq \dfrac{1}{2}$ より

$$-1 < \cos 2\theta \leqq \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\pi}{3} \leqq 2\theta < \pi,\ \pi < 2\theta \leqq \frac{5}{3}\pi$$

よって $\quad \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqq \dfrac{5}{6}\pi}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= 2(\cos\theta,\ \sin\theta) + \frac{1}{2}(\cos\theta, -\sin\theta)\\ &= \left(\frac{5}{2}\cos\theta,\ \frac{3}{2}\sin\theta\right),\\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \left(\frac{5}{2}\cos\theta,\ 0\right)\end{aligned}$$

ゆえに $\quad \triangle\mathrm{POQ} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{3}{2}\sin\theta\cdot\dfrac{5}{2}\cos\theta\right| = \dfrac{15}{16}|\sin 2\theta|$

よって $\quad 2\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$，すなわち，$\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$ のとき，**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{15}{16}}$ ■

3 (1) $f(x) = \log_2(x+1)$ より $\quad f(0) = 0,\ f(1) = 1$

$f(x) = \dfrac{k}{2}(f(1) - f(0))$ より

$$\log_2(x+1) = \frac{k}{2}(1-0) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = 2^{\frac{k}{2}} - 1}$$

(2) (1) の結果から，$x_k = 2^{\frac{k}{2}-1}$ であるから

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n} k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} k(2^{\frac{k}{2}} - 2^{\frac{k-1}{2}})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\{k\cdot 2^{\frac{k}{2}} - (k-1)\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}\} - \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k-1}{2}}\\ &= n\cdot 2^{\frac{n}{2}} - \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2}-1}\\ &= n(\sqrt{2})^n - (\sqrt{2}+1)\{(\sqrt{2})^n - 1\}\\ &= \boldsymbol{(n - \sqrt{2} - 1)(\sqrt{2})^n + \sqrt{2} + 1}\end{aligned}$$

■

4 (1) C の方程式は　$x^2+y^2=1$

$x \neq 0$ のとき，直線 ℓ の方程式は　$\dfrac{x}{s}+y=1$

このとき，C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$x^2+\left(1-\frac{x}{s}\right)^2=1 \quad \text{整理すると} \quad x\{(s^2+1)x-2s\}=0$$

R の x 座標は P と異なるから　$x=\dfrac{2s}{s^2+1}$

これを ℓ の方程式に代入すると

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{2s}{s^2+1}+y=1 \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{s^2-1}{s^2+1}$$

$s=0$ のときも上の $\mathrm{R}(x,\ y)$ は成立する．

よって，求める R の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{2s}{s^2+1},\ \dfrac{s^2-1}{s^2+1}\right)}$

(2) s が有理数のとき，$s=\dfrac{m}{n}$ ($m,\ n$ は整数，$n \neq 0$) とおくと

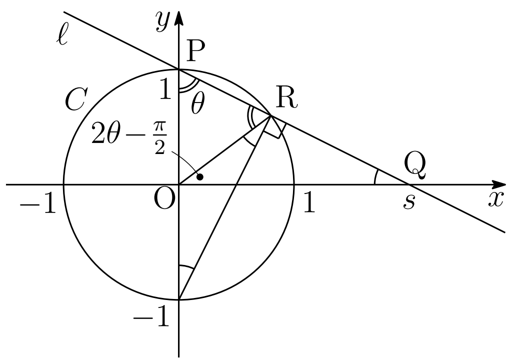
$$x=\frac{2s}{s^2+1}=\frac{2\cdot\frac{m}{n}}{\left(\frac{m}{n}\right)^2+1}=\frac{2mn}{m^2+n^2}$$

$$y=\frac{s^2-1}{s^2+1}=\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^2-1}{\left(\frac{m}{n}\right)^2+1}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

R の x 座標と y 座標は，有理数であるから，R は有理点である．

補足 右の図において，$s=\tan\theta$ とおくと $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{R}(x,\ y)$ は

$$\begin{aligned} x &= \cos\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2\theta \\ &= \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2s}{1+s^2}, \\ y &= \sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2\theta \\ &= -\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=-\frac{1-s^2}{1+s^2} \end{aligned}$$



5 (1) 原点 O の隣接点は，$(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$ の **2 個**

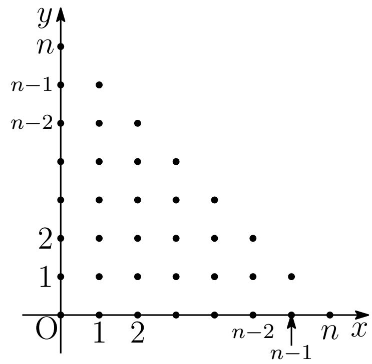
直線 $x+y=n$ 上の格子点 $\mathrm{P}(k,\ n-k)$ の隣接点の個数は $(k=0,1,2\cdots,n)$

$$\boldsymbol{k=0,\ n}\ \textbf{のとき 1 個,}\quad \boldsymbol{k=1,2,\cdots,n-1}\ \textbf{のとき 2 個}$$

(2) 領域 D 内の格子点 $(x,\ y)$ で隣接点の個数が 4 であるものは，$1\leqq k\leqq n-2$ とすると，直線 $x=k$ 上には，次の $n-k-1$ 個ある．

$$(k,\ 1),\ (k,\ 2),\ \cdots,\ (k,\ n-k-1)$$

したがって，求める個数は



$$\sum_{k=1}^{n-2}(n-k-1)=\sum_{k=1}^{n-2}k=\boldsymbol{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)}\quad \textbf{(個)}$$

(3) 格子点 $(n,\ 0)$，$(0,\ n)$ は隣接点が 1 個ある．

$1\leqq k\leqq n-1$ のとき，格子点 $(k,\ n-k)$, $(0,\ 0)$ は隣接点が 2 個ある．

$1\leqq k\leqq n-1$ のとき，格子点 $(k,\ 0)$，$(0,\ k)$ は隣接点が 3 個ある．

(1) で示した格子点は隣接点が 4 個ある．

領域 D 内の格子点の個数を N とすると

$$N=\sum_{k=0}^{n}(n+1-k)=\sum_{k=1}^{n+1}k=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

したがって，隣接点の個数の期待値は

$$\frac{1}{N}\left\{1\cdot 2+2\cdot n+3\cdot 2(n-1)+4\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\right\}$$
$$=\frac{2n(n+1)}{N}=\frac{2n(n+1)}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}=\frac{4n}{n+2}$$

この期待値が 3 以上であるとき　$\dfrac{4n}{n+2}\geqq 3$　よって　$\boldsymbol{n\geqq 6}$ ■