平成 24 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
教育 (第一類・第ニ類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・経済 (昼)・歯 (航空健康科学 (口腔保健))

1 $f(x) = \log_2(x-1) + \log_2(4-x)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の定義域を求めよ．

(2) 不等式 $f(x) \geqq 0$ を解け．

(3) 関数 $f(x)$ の最大値を m とするとき，2^{m-2} を求めよ．

(4) (3) の m について，1000^m の整数部分の桁(けた)数を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

2 放物線 $C : y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ 上に 2 点 A，B があり，A の x 座標は 3 である．点 A，点 B における C の接線をそれぞれ ℓ，m とし，ℓ と m の交点を P とおくと，$\angle\mathrm{APB} = 45°$ であった．次の問いに答えよ．

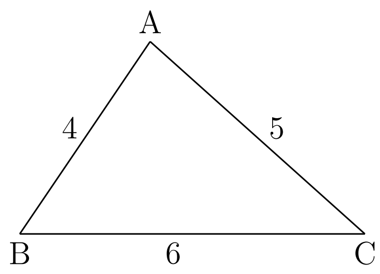
(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 接線 m の傾きを求めよ．

(3) 点 P の座標を求めよ．

(4) C，ℓ，m で囲まれた図形において，不等式 $x \geqq 0$ を満たす部分の面積 S を求めよ．

3 図のような 3 辺の長さをもつ三角形 ABC がある．



次の問いに答えよ．

(1) $45° < \angle\mathrm{B} < 60°$ を証明せよ．

(2) $\angle\mathrm{A} = 2\angle\mathrm{C}$ を証明せよ．

(3) $40° < \angle\mathrm{C} < 45°$ を証明せよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ N は 4 以上の整数とする．次の規則にしたがって 1 個のさいころを繰り返し投げる．

規則：出た目を毎回記録し，偶数の目が 3 回出るか，あるいは奇数の目が N 回出たところで，さいころを投げる操作を終了する．

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする．次の問いに答えよ．

(1) さいころを投げる回数は，最大で何回か．

(2) さいころを 3 回投げて操作を終了する確率を求めよ．

(3) さいころを N 回投げて操作を終了する確率を求めよ．

(4) 最後に奇数の目が出て操作を終了する確率を求めよ．

(5) $N=4$ のとき，さいころを投げる回数の期待値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ n は 3 以上の整数とする．1 から n までの整数から連続する 2 つの整数 x, $x+1$ を取り除く．次に問いに答えよ．

(1) $n=17$ のとき，残された整数の総和を個数 15 で割った値が $\dfrac{42}{5}$ であるとする．取り除いた 2 つの整数を求めよ．

(2) $n \geqq 39$ のとき，不等式

$$\frac{1}{2}n(n+1)-1-2(n-1) > \frac{205}{11}(n-2)$$

が成り立つことを証明せよ．

(3) 残された整数の総和を個数 $n-2$ で割った値が $\dfrac{205}{11}$ であるとする．n と取り除いた 2 つの整数を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x-1>0,\ \ 4-x>0$ 　すなわち　$\boldsymbol{1<x<4}$

(2) 不等式を変形すると　$\log_2(x-1)(4-x) \geqq \log_2 1$

底 2 は 1 より大きいから　$(x-1)(4-x) \geqq 1$

整理すると　$x^2-5x+5 \geqq 0$

(1) の結果に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$

(3) $f(x)=\log_2(x-1)(4-x)=\log_2(-x^2+5x-4)=\log_2\left\{-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}\right\}$

ゆえに　$m=\log_2\dfrac{9}{4}$　したがって　$m-2=\log_2\dfrac{9}{16}$　よって　$\boldsymbol{2^{m-2}=\dfrac{9}{16}}$

(4) $1000^m=10^{3m}$ であるから

$$\begin{aligned}3m&=3\log_2\frac{9}{4}=6\log_2\frac{3}{2}=6(\log_2 3-1)\\&=6\left(\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}-1\right)=6\left(\frac{0.4771}{0.3010}-1\right)=3.5\cdots\end{aligned}$$

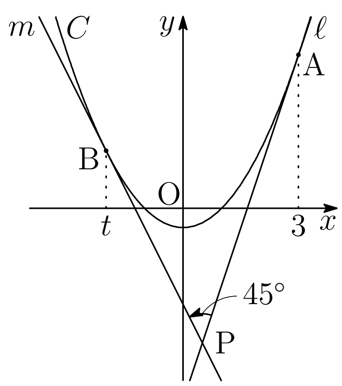
$3<3m<4$ であるから，求める桁数は　**4** ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $C: y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$ より　$y'=x$

ℓ は C 上の点 $(3,\ 4)$ における接線であるから

$$y-4=3(x-3)\quad\text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=3x-5}$$

(2) m は，ℓ を P を中心に 45° 回転させたもので，$\tan\alpha=3$ とおく．接点 B の x 座標を t とすると，接線 m の傾きは t であるから



$$\begin{aligned}t&=\tan(\alpha+45^\circ)\\&=\frac{\tan\alpha+\tan 45^\circ}{1-\tan\alpha\tan 45^\circ}\\&=\frac{3+1}{1-3\cdot 1}=\boldsymbol{-2}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から，m は点 $\mathrm{B}\left(-2,\ \frac{3}{2}\right)$ を通り，傾き -2 の直線であるから

$$y-\frac{3}{2}=-2(x+2) \quad \text{すなわち} \quad y=-2x-\frac{5}{2}$$

ℓ，m を連立すると　$\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\right)$

(4) 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}-\left(-2x-\frac{5}{2}\right)\right\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^3 \left\{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}-(3x-5)\right\} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (x+2)^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^3 (x-3)^2\,dx \\ &= \frac{1}{6}\Big[\,(x+2)^3\,\Big]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\Big[\,(x-3)^3\,\Big]_{\frac{1}{2}}^3 = \frac{\mathbf{31}}{\mathbf{8}} \end{aligned}$$

■

3 (1) 余弦定理により　$\cos B=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot4\cdot6}=\frac{9}{16}$

$\frac{1}{2}<\frac{9}{16}<\frac{8\sqrt{2}}{16}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ より　　$\cos 60^\circ<\cos B<\cos 45^\circ$

$\cos B>0$ より，$\angle\mathrm{B}$ は鋭角であるから　$45^\circ<\angle\mathrm{B}<60^\circ$

(2) 余弦定理により

$$\cos A=\frac{5^2+4^2-6^2}{2\cdot5\cdot4}=\frac{1}{8}, \quad \cos C=\frac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot6\cdot5}=\frac{3}{4}$$

$$\cos 2C=2\cos^2 C-1=2\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{1}{8}=\cos A$$

$\cos A>0$，$\cos 2C>0$ より，$\angle\mathrm{A}$，$\angle 2\mathrm{C}$ は鋭角であるから　$\angle\mathrm{A}=2\angle\mathrm{C}$

(3) $\angle\mathrm{B}=180^\circ-(\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{C})$ であるから，(2) の結果により

$$\angle\mathrm{B}=180^\circ-3\angle\mathrm{C}$$

これを (1) の結果に代入すると

$$45^\circ<180^\circ-3\angle C<60^\circ \quad \text{ゆえに} \quad 40^\circ<\angle C<\angle 45^\circ$$

■

$\boxed{4}$ (1) さいころを投げる回数が最大となるのは，偶数が 2 回，奇数が $N-1$ 回出た後にもう 1 回投げる回数であるから

$$2+(N-1)+1=\boldsymbol{N+2}\ (\text{回})$$

(2) 求める確率は，偶数の目が 3 回出る確率であるから $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

(3) さいころを N 回投げて操作が終了するのは，次の (i)，(ii) の場合である．

(i) N 回とも奇数の目が出る場合で，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N=\frac{1}{2^N}$$

(ii) $N-1$ 回目までに偶数が 2 回出て，N 回目に偶数が出る場合で，その確率は

$${}_{N-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{(N-1)(N-2)}{2^{N+1}}$$

(i)，(ii) より，求める確率は

$$\frac{1}{2^N}+\frac{(N-1)(N-2)}{2^{N+1}}=\boldsymbol{\frac{N^2-3N+4}{2^{N+1}}}$$

(4) 最後に奇数の目が出て操作が終了するのは，次の (i)〜(iii) の場合である．

(i) N 回とも奇数が出る場合で，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N=\frac{1}{2^N}$$

(ii) N 回目までに偶数が 1 回出て，$N+1$ 回目に奇数が出る場合で，その確率は

$${}_{N}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\cdot\frac{1}{2}=\frac{N}{2^{N+1}}$$

(iii) $N+1$ 回目までに偶数が 2 回出て，$N+2$ 回目に奇数が出る場合で，その確率は

$${}_{N+1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{(N+1)N}{2^{N+3}}$$

(i)〜(iii) から，求める確率は

$$\frac{1}{2^N}+\frac{N}{2^{N+1}}+\frac{(N+1)N}{2^{N+3}}=\boldsymbol{\frac{N^2+5N+8}{2^{N+3}}}$$

(5) さいころを投げる回数を X とし $(3 \leqq X \leqq 6)$，その確率を $P(X)$ とする．

(i) $X=3$ のとき，(2) の結果から　$P(3)=\dfrac{1}{8}$

(ii) $X=4$ のとき，4 回とも奇数の目が出るか，3 回目までに偶数が 2 回出て，4 回目に偶数が出る場合であるから，(3) に $n=4$ を代入して

$$P(4)=\frac{4^2-3\cdot 4+4}{2^5}=\frac{1}{4}$$

(iii) $P(6)$ は，5 回目までに偶数が 2 回，奇数が 3 回出る確率に等しいから

$$P(6)={}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{16}$$

(iv) (i)〜(iii) より

$$\begin{aligned}P(5)&=1-\{P(3)+P(4)+P(6)\}\\&=1-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{5}{16}\right)=\frac{5}{16}\end{aligned}$$

よって，求める期待値は

$$3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{5}{16}+6\cdot\frac{5}{16}=\boldsymbol{\frac{77}{16}}$$

別解 n 回投げた時点で，偶数が j 回，奇数が k 回出ている確率を P_j^k とすると

$$\mathrm{P}_j^k = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{P}_{j-1}^k + \mathrm{P}_j^{k-1}\right) & (1 \leqq j < 3,\ 1 \leqq k < 4) \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{P}_{j-1}^k & (j = 3) \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{P}_j^{k-1} & (k = 4) \end{cases}$$

が成り立つ ($\mathrm{P}_0^1 = \frac{1}{2}$，$\mathrm{P}_1^0 = \frac{1}{2}$).

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
			$\boxed{\mathrm{P}_0^4 = \frac{1}{16}}$		
		$\mathrm{P}_0^3 = \frac{1}{8}$		$\boxed{\mathrm{P}_1^4 = \frac{1}{8}}$	
	$\mathrm{P}_0^2 = \frac{1}{4}$		$\mathrm{P}_1^3 = \frac{1}{4}$		$\boxed{\mathrm{P}_2^4 = \frac{5}{32}}$
$\mathrm{P}_0^1 = \frac{1}{2}$		$\mathrm{P}_1^2 = \frac{3}{8}$		$\mathrm{P}_2^3 = \frac{5}{16}$	
	$\mathrm{P}_1^1 = \frac{1}{2}$		$\mathrm{P}_2^2 = \frac{3}{8}$		$\boxed{\mathrm{P}_3^3 = \frac{5}{32}}$
$\mathrm{P}_1^0 = \frac{1}{2}$		$\mathrm{P}_2^1 = \frac{3}{8}$		$\boxed{\mathrm{P}_3^2 = \frac{3}{16}}$	
	$\mathrm{P}_2^0 = \frac{1}{4}$		$\boxed{\mathrm{P}_3^1 = \frac{3}{16}}$		
		$\boxed{\mathrm{P}_3^0 = \frac{1}{8}}$			

さいころを投げる回数が X である確率を $P(X)$ とすると，上の計算から

$$P(3) = \frac{1}{8}, \qquad P(4) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4},$$
$$P(5) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16}, \qquad P(6) = \frac{5}{32} + \frac{5}{32} = \frac{5}{16}$$

よって，求める期待値は

$$3\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{1}{4} + 5\cdot\frac{5}{16} + 6\cdot\frac{5}{16} = \frac{77}{16}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 取り除いた2つの整数を $x,\ x+1$ とすると

$$\frac{1}{2}\cdot 17\cdot 18-(2x+1)=\frac{42}{5}\times 15 \quad \text{これを解いて} \quad x=13$$

よって，求める2数は　**13，14**

(2) $n \geqq 39$ のとき

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)-1-2(n-1)}{n-2}=\frac{1}{2}(n-1) \geqq 19>\frac{205}{11}$$

よって　$\displaystyle \frac{1}{2}n(n+1)-1-(n-1)>\frac{205}{11}(n-2)$

(3) 1から n までの整数の和から連続する2数を除いた整数を $n-2$ で割った値の最大値を A_M，最小値を A_m とすると

$$A_M=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)-1-2}{n-2}=\frac{n+3}{2}$$
$$A_m=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)-(n-1)-n}{n-2}=\frac{n-1}{2}$$

したがって　$\displaystyle \frac{n-1}{2} \leqq \frac{205}{11} \leqq \frac{n+3}{2}$　ゆえに　$35 \leqq n \leqq 38$

$n-2$ は11の倍数であるから　$\boldsymbol{n=35}$

したがって，取り除いた2数を $x,\ x+1$ とすると

$$x+(x+1)=\frac{1}{2}\cdot 35\cdot 36-\frac{205}{11}\cdot 33 \quad \text{これを解いて} \quad x=7$$

よって，取り除いた2数は　**7，8**　■