# 平成 23 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
## 教育 (第一類・第ニ類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・経済 (昼)・歯 (航空健康科学 (口腔保健))

**1** 次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を $a$，小数部分を $b$ とする．不等式

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} < \frac{6}{a} + \frac{k}{b}$$

を満たす $k$ の値の範囲を求めよ．

(2) $a$，$b$ は定数で，$a > 0$ とする．2 次関数 $f(x) = ax^2 - 2x + b$ の定義域を $-1 \leqq x \leqq 2$ とし，$f(-1) < f(2)$ を満たすとする．関数 $y = f(x)$ の値域が $-1 \leqq y \leqq 7$ であるとき，定数 $a$，$b$ の値を求めよ．

**2** 次の問いに答えよ．

(1) $\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 $m$，$n$ は存在しないことを証明せよ．

(2) $p$，$q$ を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ．

(3) $\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ．

**3** 放物線 $F : y = \dfrac{1}{2}(x+1)^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通り，A における $F$ の接線に垂直な直線を $\ell$ とし，$\ell$ と放物線 $F$ との交点のうち点 A と異なる方を $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{2}(b+1)^2\right)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 直線 $\ell$ の方程式と $b$ の値を求めよ．

(2) 放物線 $F$ と直線 $\ell$ で囲まれた部分の面積 $T_1$ を求めよ．

(3) 線分 AB を直径とする円を $C$ とする．このとき，不等式 $y \leqq \dfrac{1}{2}(x+1)^2$ の表す領域で円 $C$ の内部にある部分の面積 $T_2$ を求めよ．

$\boxed{4}$ 平面上で，線分 AB を 1 : 2 に内分する点を O，線分 AB を 1 : 4 に外分する点を C とする．P を直線 AB 上にない点とし，$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ が垂直であるとする．$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{b}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ で表せ．

(3) $\mathrm{PA} = 1$，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積が $\dfrac{3}{2}$ のとき，PB の長さを求めよ．

$\boxed{5}$ さいころを $n$ 回投げる．$k$ 回目 $(k = 1, 2, \cdots, n)$ に投げた結果，

1 または 2 の目が出たとき $X_k = 2$，
3 または 4 の目が出たとき $X_k = 3$，
5 または 6 の目が出たとき $X_k = 5$

とする．これらの積を $Y = X_1 X_2 \cdots X_n$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $n = 5$ のとき，$Y$ が偶数になる確率 $p_1$ を求めよ．

(2) $n = 5$ のとき，$Y$ が 100 の倍数になる確率 $p_2$ を求めよ．

(3) $n = 2$ のとき，$Y$ の期待値 $E$ を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}=3+(\sqrt{3}-1)$

$0<\sqrt{3}-1<1$ であるから　$a=3$，$b=\sqrt{3}-1$

上の結果を $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}<\dfrac{6}{a}+\dfrac{k}{b}$ に代入すると

$$2+\sqrt{3}<\frac{6}{3}+\frac{k}{\sqrt{3}-1}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{k>3-\sqrt{3}}$$

(2) $a>0$ であるから，放物線 $y=ax^2-2x+b$ は下に凸である．

$y=a\left(x-\dfrac{1}{a}\right)^2-\dfrac{1}{a}+b$ より，軸の方程式は　$x=\dfrac{1}{a}$

定義域 $-1\leqq x\leqq 2$ の中央は $\dfrac{1}{2}$ で，$f(-1)<f(2)$ であるから

$$\frac{1}{a}<\frac{1}{2}\quad \text{ゆえに}\quad a>2\quad \cdots①$$

また，関数 $y=f(x)$ の値域が $-1\leqq y\leqq 7$ であるから

$$f(2)=7,\ f\left(\frac{1}{a}\right)=-1\quad \text{ゆえに}\quad (*)\begin{cases}4a+b=11\\ -\dfrac{1}{a}+b=-1\end{cases}$$

$(*)$ から，$b$ を消去して整理すると　$4a^2-12a+1=0$

① に注意して解くと　　$\boldsymbol{a=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}}$

これを $(*)$ の第 1 式に代入することにより　$\boldsymbol{b=5-4\sqrt{2}}$

**2 次関数 (下に凸の放物線) の閉区間における最大値**

定義域の中央が軸より左側にあるとき定義域の左端で最大値をとり，
定義域の中央が軸より右側にあるとき定義域の右端で最大値をとる．

■

**2** (1) $\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ より　$2^{\frac{m}{n}} = 3$　ゆえに　$2^m = 3^n$

$m$，$n$ は，自然数であるから，上式は素因数分解の一意性に反する．

よって，$\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 $m$，$n$ は存在しない．

**補足** 自然数 $m$，$n$ に対し，$2^m = 3^n$ の左辺は偶数，右辺は奇数であるから矛盾．

(2) $p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分が等しくなる自然数 $p$，$q$ に対し $(p \neq q)$

$$p\log_2 3 - q\log_2 3$$

は整数であるから，これを $l$ とすると

$$(p-q)\log_2 3 = l \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 3 = \frac{l}{p-q}$$

これは (1) の結果に反するので，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分が等しくなる自然数 $p$，$q$ $(p \neq q)$ は存在しない．

(3) $8 < 9$，$243 < 256$，すなわち，$2^3 < 3^2$，$3^5 < 2^8$　ゆえに　$2^{\frac{3}{2}} < 3 < 2^{\frac{8}{5}}$

したがって　$\dfrac{3}{2} < \log_2 3 < \dfrac{8}{5}$　すなわち　$1.5 < \log_2 3 < 1.6$

よって，$\log_2 3$ の小数第 1 位は　**5**

**補足** $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ ということを知っていれば

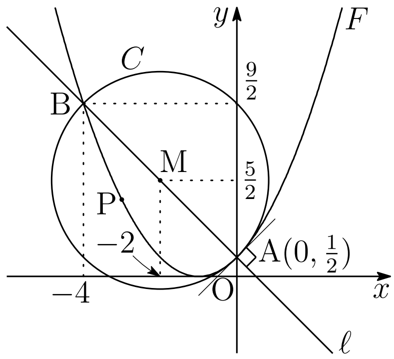
$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

を計算することで，$1.5 < \log_2 3 < 1.6$ を評価すればよいことが分かる．■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=\dfrac{1}{2}(x+1)^2$ より　$y'=x+1$

$x=0$ のとき，$y'=1$ より，$\ell$ の傾きは $-1$

$\ell$ は点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通り，傾き $-1$ の直線であるから




$$\boldsymbol{\ell : y = -x + \frac{1}{2}}$$

$F$ と $\ell$ の方程式から $y$ を消去すると

$$\frac{1}{2}(x+1)^2 = -x + \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad x(x+4)=0$$

よって，点 B の $x$ 座標 $b$ は　$\boldsymbol{b=-4}$

(2) (1) の結果から，放物線 $F$ と直線 $\ell$ で囲まれた部分の面積 $T_1$ は

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{-4}^{0}\left\{-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x+1)^2\right\}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-4}^{0} x(x+4)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 4^3 = \boldsymbol{\frac{16}{3}} \end{aligned}$$

(3) $\mathrm{B}\left(-4,\ \dfrac{9}{2}\right)$ であるから，円 $C$ の中心を M とすると　$\mathrm{M}\left(-2,\ \dfrac{5}{2}\right)$

$C$ の半径は $2\sqrt{2}$ で，$F$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}(t+1)^2\right)$ について $(-4 \leqq t \leqq 0)$

$$\begin{aligned} \mathrm{MP}^2-(\sqrt{8})^2 &= (t+2)^2+\left\{\frac{1}{2}(t+1)^2-\frac{5}{2}\right\}^2-8 \\ &= \frac{1}{4}t^3(t+4) \leqq 0 \end{aligned}$$

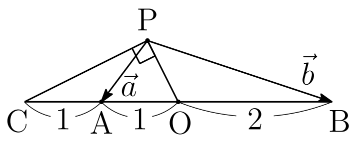
したがって，区間 $-4 \leqq x \leqq 0$ において，$F$ は $C$ の内部にある．

よって，求める面積 $T_2$ は (2) の結果から

$$T_2 = \frac{1}{2}\pi(2\sqrt{2})^2 - T_1 = \boldsymbol{4\pi - \frac{16}{3}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 点Oは線分ABを1 : 2に内分する点であるから




$$\overrightarrow{\mathbf{PO}} = \frac{\mathbf{2\vec{a}+\vec{b}}}{\mathbf{3}}$$

点Cは線分ABを1 : 4に外分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \frac{-4\vec{a}+\vec{b}}{1-4} = \frac{\mathbf{4\vec{a}-\vec{b}}}{\mathbf{3}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PC}}$ より，$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(4\vec{a}-\vec{b}) = 0$ であるから

$$8|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{b}|^2 = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = -4|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{b}|^2}$$

(3) $|\vec{b}| = x$ とおいて，これと $|\vec{a}| = 1$ を (2) の結果に代入すると

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -4 + \frac{1}{2}x^2$$

$\triangle\mathrm{PAB} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ であるから，$\triangle\mathrm{PAB} = \frac{2}{3}$ および上式より

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1^2x^2 - \left(-4+\frac{1}{2}x^2\right)^2}$$

整理すると　$x^4 - 20x^2 + 100 = 0$　ゆえに　$(x^2-10)^2 = 0$

$x > 0$ であるから　　$\mathrm{PB} = |\vec{b}| = \boldsymbol{\sqrt{10}}$ ■

**5** (1) $Y$ が奇数となる確率は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5$

求める確率 $p_1$ は，この余事象の確率であるから

$$p_1 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 - \frac{32}{243} = \mathbf{\frac{211}{243}}$$

(2) $100 = 2^2{\cdot}5^2$ であるから，$X_k = 2$，$X_k = 5$ が少なくとも 2 回ずつある．

(i) $X_k = 2$ が 2 回，$X_k = 5$ が 3 回ある確率は

$$\frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{10}{243}$$

(ii) $X_k = 2$ が 3 回，$X_k = 5$ が 2 回ある確率は

$$\frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{10}{243}$$

(iii) $X_k = 2$ が 2 回，$X_k = 3$ が 1 回，$X_k = 5$ が 2 回ある確率は

$$\frac{5!}{2!1!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{30}{243}$$

(i)〜(iii) より，求める確率 $p_2$ は

$$p_2 = \frac{10}{243} + \frac{10}{243} + \frac{30}{243} = \mathbf{\frac{50}{243}}$$

(3) $Y = X_1X_2$ のとりうる値は，次の 6 通り

$$2^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 2{\cdot}3,\ 2{\cdot}5,\ 3{\cdot}5$$

したがって

| $Y$ | 4 | 9 | 25 | 6 | 10 | 15 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y)$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | 1 |

よって，求める期待値 $E(Y)$ は

$$E(Y) = \frac{1}{9}(4+9+25) + \frac{2}{9}(6+10+15) = \mathbf{\frac{100}{9}}$$

別解 $$E(X_1) = E(X_2) = \frac{1}{3}(2+3+5) = \frac{10}{3}$$

事象 $X_1$，$X_2$ は独立であるから，求める期待値 $E(Y)$ は

$$E(Y) = E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2) = \frac{10}{3}{\cdot}\frac{10}{3} = \frac{100}{9}$$

■