平成21年度　広島大学　２次試験前期日程(数学問題)120分
教育(第一類・第二類(技術・情報系)・第四類(人間生活系))・経済(昼)・歯(口腔健康科学(口腔保健))

問題 1 2 3 4 5

1 関数 $y = x - x^3$ のグラフと，その上の点 $\mathrm{P}(t,\ t - t^3)$，および点 P における接線 ℓ を考える．ただし $t > 0$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $y = x - x^3$ の増減を調べ，極値を求めよ．また，そのグラフをかけ．

(2) ℓ と $y = x - x^3$ のグラフの交点を Q とおく．ただし Q は P と異なる点とする．点 Q の x 座標を求めよ．

(3) 三角形 OPQ の面積が 12 になるとき t を求めよ．ただし点 O は原点である．

2 以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え，真の場合は証明を，偽の場合は反例を与えよ．

(1) $x < y$ ならば $x^2 < y^2$ である．

(2) $\log_2 x = \log_3 y$ ならば $x \leqq y$ である．

(3) 微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a) = 0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x = a$ において極値をとる．

(4) n が 2 以上の自然数ならば，$1 + 2 + \cdots + n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある．

3 座標平面上の定点 P と，関数 $y = f(x)$ のグラフ上を動く点 Q を考える．このとき，点 P と点 Q の距離 PQ の最小値を，点 P と $y = f(x)$ のグラフの距離と呼ぶことにする．次の問いに答えよ．

(1) 点 $\mathrm{P}_1\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$ と $y = x^2$ のグラフの距離 d_1 の値を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{P}_2\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ と $y = x^2$ のグラフの距離 d_2 の値を求めよ．また，$d_2 = \mathrm{P}_2\mathrm{R}$ となる $y = x^2$ のグラフ上の点 R をすべて求めよ．

(3) 点 P_2 を中心とする半径 d_2 の円と $y = x^2$ のグラフで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

4 四面体 OABC において，

$$\angle \mathrm{AOB} = \angle \mathrm{AOC} = \frac{\pi}{2}, \quad \angle \mathrm{BOC} = \frac{\pi}{3}, \quad \mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 2, \quad \mathrm{OC} = 1$$

とする．3 点 A，B，C を通る平面上の点 P を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ とする．
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，$\vec{p}$ は実数 s，t を用いて

$$\vec{p} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

と表される．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{p}\cdot\vec{a}$，$\vec{p}\cdot\vec{b}$，$\vec{p}\cdot\vec{c}$ を s，t を用いて表せ．

(2) 点 P が $\angle \mathrm{AOP} = \angle \mathrm{BOP} = \angle \mathrm{COP}$ を満たすとき，s，t の値を求めよ．

(3) (2) の条件を満たす点 P について，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする．BQ : QC を求めよ．

(4) (2) の条件を満たす点 P について，2 つの四面体 OABP と OACP の体積の比を求めよ．

5 2 人のプレーヤー A，B が対戦を繰り返すゲームを行う．1 回の対戦につき A が勝つ確率は p であり，B が勝つ確率は $1 - p$ であるとする (ただし $0 < p < 1$)．A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている．1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る．対戦を繰り返して一方のプレーヤーがすべての金貨を手に入れたとき，ゲームを終了する．ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする．ただし n は自然数とする．

(1) P_2 と P_4 を求めよ．

(2) P_{2n-1} を求めよ．

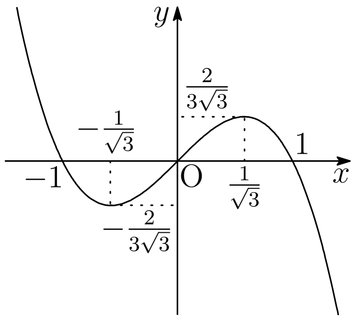
(3) P_{2n} を求めよ．

(4) $2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $y = x - x^3$ より　$y' = 1 - 3x^2$

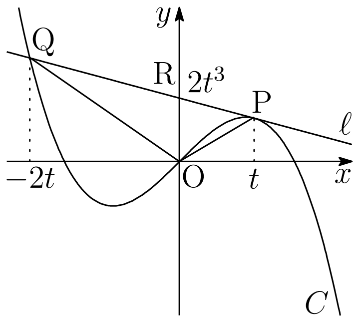
x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$



よって　$x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき極小値 $\boldsymbol{-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$

$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき極大値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$

(2) 曲線 $C : y = x - x^3$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t - t^3)$ における接線 ℓ の方程式は



$$y - (t - t^3) = (1 - 3t^2)(x - t)$$

すなわち　$y = (1 - 3t^2)x + 2t^3$

C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$x - x^3 = (1 - 3t^2)x + 2t^3$$

したがって　$(x - t)^2(x + 2t) = 0$

よって，Q の x 座標は $x \neq t$ であることに注意して　$\boldsymbol{x = -2t}$

(3) ℓ と y 軸の交点を R とすると

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \triangle\mathrm{OPR} + \triangle\mathrm{OQR} = \frac{1}{2}\cdot 2t^3\cdot t + \frac{1}{2}\cdot 2t^3\cdot 2t = 3t^4$$

$\triangle\mathrm{OPQ} = 12$ より　$3t^4 = 12$　ゆえに　$(t^2 + 2)(t^2 - 2) = 0$

$t > 0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{t = \sqrt{2}}$　■

2 (1) $x=-2,\ y=-1$ とすると，$x<y$ であるが $x^2>y^2$

したがって，本命題は偽である．

(2) $x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{3}$ とすると，$\log_2 x=\log_3 y$ であるが $x>y$

したがって，本命題は偽である．

(3) $f(x)=(x-a)^3$ とすると，$f'(a)=0$ を満たすが，$f(a)$ は極値ではない．

したがって，本命題は偽である．

(4) $S=1+2+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

連続する 2 数 $n,\ n+1$ の一方は奇数である．

$n \geqq 2$ から，S の約数の中に 3 以上の奇数がある．

したがって，本命題は真である． ■

3 (1) $P_1\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$，$Q(x,\ x^2)$ より

$$P_1Q^2 = x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 = x^4 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9} = \left(x^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{12}$$

$x^2 = 0$，すなわち，$Q(0,\ 0)$ のとき，P_1Q は最小となるから　$\boldsymbol{d_1 = \dfrac{1}{3}}$

(2) $P_2\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$，$Q(x,\ x^2)$ より

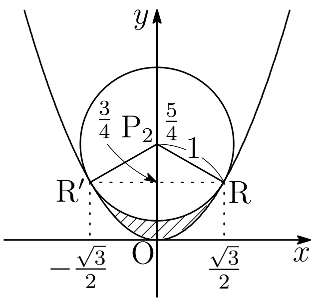
$$P_2Q^2 = x^2 + \left(x^2 - \frac{5}{4}\right)^2 = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{16} = \left(x^2 - \frac{3}{4}\right)^2 + 1$$

$x^2 = \dfrac{3}{4}$ のとき，P_2Q は最小となるから　$\boldsymbol{d_2 = 1}$

このとき，点 R は　$\boldsymbol{\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)}$

(3) $R\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$，$R'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$ とすると

$$\angle RP_2R' = \frac{2}{3}\pi$$



P_2 を中心とする半径 1 の円で，直線 RR' の下側の部分の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2\left(\frac{2}{3}\pi - \sin\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

放物線 $y = x^2$ と直線 $RR' : y = \dfrac{3}{4}$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{3}{4} - x^2\right) dx \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right) dx = \frac{1}{6}(\sqrt{3})^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

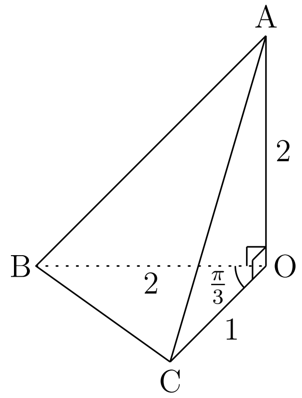
よって，求める面積を S とすると

$$S = S_2 - S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}}$$

■

4 (1) $\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{AOC} = \dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{BOC} = \dfrac{\pi}{3}$，

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$，$|\vec{c}| = 1$ より



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos\frac{\pi}{3} = 1$$
$$\vec{c}\cdot\vec{a} = |\vec{c}||\vec{a}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

したがって

$$\vec{p}\cdot\vec{a} = \{(1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\}\cdot\vec{a} = \boldsymbol{4(1-s-t)},$$
$$\vec{p}\cdot\vec{b} = \{(1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\}\cdot\vec{b} = \boldsymbol{4s+t},$$
$$\vec{p}\cdot\vec{c} = \{(1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\}\cdot\vec{c} = \boldsymbol{s+t},$$

(2) $\angle\mathrm{AOP} = \angle\mathrm{BOP} = \angle\mathrm{COP}$，$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2|\vec{c}|$ であるから

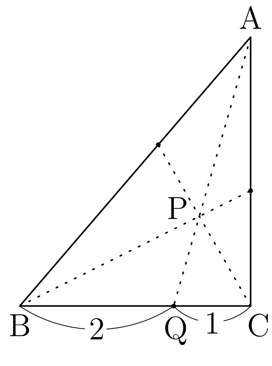
$$\vec{p}\cdot\vec{a} = \vec{p}\cdot\vec{b} = 2\vec{p}\cdot\vec{c}$$

したがって，(1) の結果から

$$4(1-s-t) = 4s+t = 2(s+t) \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{s = \frac{2}{9}},\ \boldsymbol{t = \frac{4}{9}}$$

(3) (2) の結果より，$\vec{p} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{9}\vec{b} + \dfrac{4}{9}\vec{c}$ であるから

$$3(\vec{a}-\vec{p}) + 2(\vec{b}-\vec{p}) + 4(\vec{b}-\vec{p}) = \vec{0}$$
$$3\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}$$



ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 2\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{3} = 2\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

よって　**BQ : QC = 2 : 1**

(4) (3) の結果から　$\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{PCA} = 2 : 1$

よって，四面体 OABP，OCAP の体積比は　**2 : 1**　■

$\boxed{5}$ (1) P_2 はAが1戦目と2戦目に勝つ確率であるから　$\boldsymbol{P_2 = p^2}$

P_4 はAが2回対戦した時点で1勝1敗で，3戦目と4戦目に勝つ確率であるから

$$P_4 = 2p(1-p) \times p^2 = \boldsymbol{2p^3(1-p)}$$

(2) $2n-1$ 回対戦した時点でAの金貨の枚数は1枚か3枚であるから

$$\boldsymbol{P_{2n-1} = 0}$$

(3) $2n$ 回対戦した時点でAの金貨の枚数が2枚である確率を a_n とすると

$$a_1 = 2p(1-p),\quad a_{n+1} = 2p(1-p)a_n \quad \text{すなわち} \quad a_n = \{2p(1-p)\}^n$$

$P_{2n} = p^2 a_{n-1}$ であるから　$\boldsymbol{P_{2n} = p^2\{2p(1-p)\}^{n-1}}$

(4) (3)の結果から

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} P_{2k} = p^2 \sum_{k=1}^{n} \{2p(1-p)\}^{k-1} \\ &= \boldsymbol{p^2 \cdot \frac{1-\{2p(1-p)\}^n}{1-2p(1-p)}} \end{aligned}$$

■