平成20年度　広島大学　２次試験前期日程(数学問題)120分
教育(第一類・第二類(技術・情報系)・第四類(人間生活系))・経済(昼)・歯(口腔健康科学(口腔保健))

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

$\boxed{1}$ 3次関数

$$y = x^3 - cx$$

のグラフを考える．ただし，c は定数とする．そして，2点P，Qが，次の条件を満たしながら，このグラフ上全体を動くものとする．

(条件)　Pの x 座標はQの x 座標より1だけ小さい．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分PQの傾きが最小になるときの点Pの x 座標と，傾きの最小値を求めよ．

(2) 線分PQの傾きが0となる点Pが存在するような，c の値の範囲を求めよ．

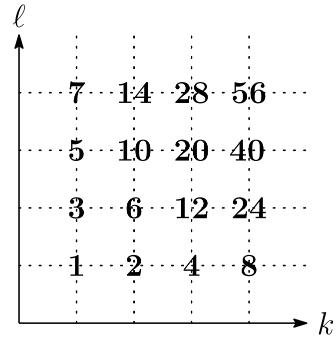
(3) 線分PQの中点の x 座標と同じ x 座標をもつグラフ上の点をRとする．点Rにおけるグラフの接線の傾きは，線分PQの傾きより常に小さいことを示せ．

$\boxed{2}$ k，ℓ を自然数とし，座標平面上の点 $(k,\ \ell)$ に数 $2^{k-1}(2\ell - 1)$ を記入する(下図を参照)．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 $(2,\ 25)$ に記入される数を求めよ．

(2) 2008が記入される点の座標を求めよ．

(3) どの自然数も座標平面上のどこかの点に1回だけ記入される．その理由を書け．



3 2点A，Bと，その上を動く1個の石を考える．この石は，時刻$t=0$で点Aにあり，その後，次の規則(a)，(b)にしたがって動く．

各$t=0,1,2,\cdots$に対して，

(a) 時刻tに石が点Aにあれば，時刻$t+1$に石が点Aにある確率は$\dfrac{1}{3}$，点Bにある確率は$\dfrac{2}{3}$である．

(b) 時刻tに石が点Bにあれば，時刻$t+1$に石が点Bにある確率は$\dfrac{1}{3}$，点Aにある確率は$\dfrac{2}{3}$である．

いま，nを自然数とし，時刻$t=n$において石が点Aにある確率をp_nとするとき，次の問いに答えよ．

(1) p_1を求めよ．

(2) p_{n+1}をp_nを用いて表せ．

(3) p_nを求めよ．

4 $x_1=x_2=1$とし，x_n $(n=3,4,\cdots)$はx_{n-2}とx_{n-1}の和を3で割ったときの余りであるとして，数列$\{x_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$を定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 数列$\{x_n\}$の第3項から第12項までのそれぞれの値を，解答用紙ある表の中に書け．

(2) x_{346}を求めよ．

(3) $S_m=\displaystyle\sum_{n=1}^{m}x_n$とおくとき，$S_m \geqq 684$を満たす最小の自然数$m$を求めよ．

5 三角形OABにおいて，OAを$t:(1-t)$に内分する点をM，OBを$t:(1-t)$に内分する点をNとする．ただし，tは$0<t<1$の範囲を動く．そして，線分ANとBMの交点をPとするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$および$t$を用いて表し，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$が平行であることを示せ．

(2) $t=\dfrac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BP}}$とするとき，$s$を$t$を用いて表し，$s$のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) 三角形AMPと三角形OABの面積比$r=\dfrac{\triangle\mathrm{AMP}}{\triangle\mathrm{OAB}}$を(2)の$s$を用いて表し，$r$の最大値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=x^3-cx$ とおき，$\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする．

線分 PQ の傾きを m_1 とすると

$$m_1=\frac{f(q)-f(p)}{q-p}=\frac{(q^3-cq)-(p^3-cp)}{q-p}$$
$$=\frac{(q-p)^3+3pq(q-p)-c(q-p)}{q-p}$$
$$=(q-p)^2+3pq-c$$

条件より，$q=p+1$ であるから

$$m_1=1+3p(p+1)-c=3\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-c \quad \cdots ①$$

よって，点 P の x 座標が $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{4}-c}$ をとる．

(2) (1) で求めた最小値が 0 以下であればよいから

$$\frac{1}{4}-c\leqq 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{c\geqq\frac{1}{4}}$$

(3) $f(x)=x^3-cx$ を微分すると　$f'(x)=3x^2-c$

点 $\mathrm{R}(r,\ f(r))$ におけるグラフの接線の傾きを m_2 とすると

$$m_2=f'(r)=3r^2-c \quad \cdots ②$$

このとき，$r=p+\frac{1}{2}$ であるから，①，② より

$$m_2-m_1=3r^2-c-\left\{3\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-c\right\}=-\frac{1}{4}<0$$

したがって　　$m_2<m_1$　　よって，題意は成立する． ■

$\boxed{2}$ (1) 点 (2, 25) に記入される数は　$2^{2-1}(2{\cdot}25-1)=\mathbf{98}$

(2) $2008=2^3{\cdot}251=2^{4-1}(2{\cdot}126-1)$　よって　点 **(4, 126)**

(3) 任意の自然数は，$2^{k-1}\times$(奇数) とかける (k は自然数)．このとき，自然数 ℓ を用いて，(奇数) $=2\ell-1$ とすると，任意の自然数は

$$2^{k-1}(2\ell-1)$$

と一意的に表される．実際，$(k,\ \ell)\neq(k',\ \ell')$ について

$$2^{k-1}(2\ell-1)=2^{k'-1}(2\ell'-1)$$

と仮定すると，$k=k'$ のとき，上式より $\ell=\ell'$ となり，不適．
一般性を失うことなく，$k>k'$ とすると

$$2^{k-k'}(2\ell-1)=2\ell'-1$$

上式の左辺は偶数，右辺は奇数となり，不適．
よって，任意の自然数は，自然数 $k,\ \ell$ を用いて一意的に

$$2^{k-1}(2\ell-1)$$

と表される．■

$\boxed{3}$ (1) 与えられた規則から

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}(1-p_n)\quad ゆえに\quad p_{n+1}=-\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}\quad\cdots(*)$$

$(*)$ に $n=0$ を代入すると　$p_1=-\frac{1}{3}{\cdot}1+\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

(2) $(*)$ より　$\boldsymbol{p_{n+1}=-\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}}$

(3) $(*)$ より　$p_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$

よって，$\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\quad よって\quad \boldsymbol{p_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $\{x_n\}$ の規則により

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_n	1	1	**2**	**0**	**2**	**2**	**1**	**0**	**1**	**1**	**2**	**0**

(2) (1) の結果から，n を自然数とすると　$x_n = x_{n+8}$

$346 = 8\cdot 43 + 2$ であるから　$x_{346} = x_2 = \mathbf{2}$

(3) $x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 9$，$684 = 9 \times 76$，$8 \times 76 = 608$ より

$$\sum_{n=1}^{608} x_n = 684$$

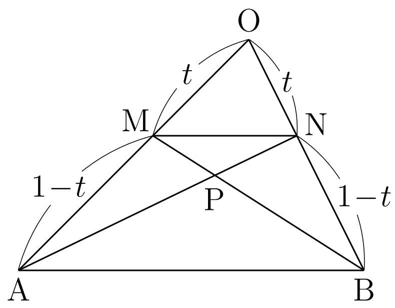
ここで，$x_{608} = x_8 = 0$，$x_{607} = x_7 = 1 \neq 0$ であることに注意すると，求める最小の自然数 m は　$\boldsymbol{m = 607}$ ■

$\boxed{5}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{ON}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}} - t\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \boldsymbol{t(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は平行である．



(2) AB//MN であるから，△PAB ∽ △PNM であり，その相似比は，$1 : t$ であるから

$$s = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BP}} = \frac{\mathrm{BP} + \mathrm{PM}}{\mathrm{BP}} = \frac{1+t}{1} = \mathbf{1} + \boldsymbol{t}$$

$0 < t < 1$ より　　$\mathbf{1} < \boldsymbol{s} < \mathbf{2}$

(3) $\dfrac{\triangle\mathrm{AMP}}{\triangle\mathrm{ABM}} = \dfrac{t}{1+t}$，$\dfrac{\triangle\mathrm{ABM}}{\triangle\mathrm{OAB}} = (1-t)$ であるから，$t = s - 1$ により

$$r = \frac{\triangle\mathrm{AMP}}{\triangle\mathrm{OAB}} = \frac{t(1-t)}{1+t} = \frac{(s-1)\{1-(s-1)\}}{1+(s-1)} = \mathbf{3} - \left(\boldsymbol{s} + \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{s}}\right)$$

相加平均・相乗平均の大小関係により　$s + \dfrac{2}{s} \geqq 2\sqrt{2}$　$\cdots$①

① において，等号が成立するとき　$s = \dfrac{2}{s}$　すなわち　$s = \sqrt{2}$

したがって　$r \leqq 3 - 2\sqrt{2}$　よって，r の最大値は　$\mathbf{3 - 2\sqrt{2}}$ ■