平成 19 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・経済 (昼)・歯 (口腔健康科学 (口腔保健))

問題 1 2 3 4 5

1 α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，x の関数

$$f(x) = \sqrt{2}x^3 - 3(\sin\alpha)x^2 + \sin\alpha\cos 2\alpha$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および方程式 $f'(x) = 0$ の解を求めよ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が相異なる 3 つの実数解をもつような α の値の範囲を求めよ．

2 図のように，1 を左下のマス目におき，1 の右に 2 を，2 の上に 3 を，3 の左に 4 をおく．次に 2 の右に 5 をおき，5 の上に 6，7 を，7 の左に 8，9 をおく．このように，すでに埋められたマス目のまわりを右下から左上まで自然数を順に並べていく．左から j 番目，下から k 番目のマス目にある自然数を $a(j,k)$ と書く．例えば $a(3,4) = 14$，$a(3,5) = 23$ である．

16	15	14	13	
9	8	7	12	
4	3	6	11	
1	2	5	10	

(1) $a(1,k)$，$a(j,1)$ をそれぞれ k，j の式で表せ．

(2) $a(j,k)$ を $j \geqq k$ と $j < k$ の場合に分けて求めよ．

(3) $a(j,k) = 2007$ となる j，k を求めよ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a(k,k)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標空間の 2 点 A(2, 0, 0)，B(0, −1, 0) および

$$\vec{u} = (-1,\ 2,\ 5), \quad \vec{v} = (1,\ 1,\ 1), \quad \vec{w} = (-1,\ 3,\ 1)$$

と成分表示される 3 つのベクトルがある．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ．

(2) 上で求めた点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 C(0, 0, c) を求めよ．

(3) 上で求めた点 P と C に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は 2 つの実数 a, b を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = a\overrightarrow{\mathrm{CA}} + b\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

と表せることを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ p を正の定数とし，放物線 $C : y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}$ 上の点 P(p, q) における C の接線を l とする．

(1) 点 Q(p, 0) を通り，l に直交する直線 m の方程式を求めよ．

(2) 放物線 C と直線 m の 2 つの交点の x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とすれば，$\alpha < 0 < \beta < p$ であることを示せ．

(3) 放物線 C と直線 m で囲まれた図形のうち $x \geqq 0$ の範囲にある部分の面積を S_1，放物線 C と直線 m および直線 $x = p$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．このとき，$S_2 - S_1 = \dfrac{1}{6}p^3$ であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 袋の中に，1 と書いた玉が 2 個，2 と書いた玉が m 個，3 と書いた玉が $(8-m)$ 個，合計 10 個入っている．ただし，$2 \leqq m \leqq 7$ とする．この袋から玉を 2 個取り出し，それらの玉に書かれた数の和を S とする．次の問いに答えよ．

(1) $S = 4$ となる確率を求めよ．

(2) S を 3 で割った余りが 2 である確率を求めよ．

(3) S を 3 で割った余りの期待値 E を求めよ．

(4) E の値を最大にする m の値とそのときの E の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=\sqrt{2}x^3-3(\sin\alpha)x^2+\sin\alpha\cos 2\alpha$ より

$$f'(x)=3\sqrt{2}x^2-6(\sin\alpha)x=\boldsymbol{3\sqrt{2}x(x-\sqrt{2}\sin\alpha)}$$

$f'(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=0,\ \sqrt{2}\sin\alpha}$

(2) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$f(x)$ の極大値は $f(0)$，極小値は $f(\sqrt{2}\sin\alpha)$

$$\begin{aligned} f(0)&=\sin\alpha\cos 2\alpha\\ f(\sqrt{2}\sin\alpha)&=4\sin^3\alpha-6\sin^3\alpha+\sin\alpha\cos 2\alpha\\ &=\sin\alpha(\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha)=\sin\alpha(1-4\sin^2\alpha)\end{aligned}$$

$f(x)$ が異なる 3 つの実数解をもつとき

$$f(0)>0,\quad f(\sqrt{2}\sin\alpha)<0$$

したがって　$\sin\alpha\cos 2\alpha>0,\quad \sin\alpha(1-4\sin^2\alpha)<0$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，第 1 式から，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$，第 2 式から，$\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

よって，求める α の値の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}}$ ■

$\boxed{2}$ (1) $\boldsymbol{a(1,k)=k^2}$，$a(j,1)=a(1,j-1)+1=(j-1)^2+1=\boldsymbol{j^2-2j+2}$

(2) $j\geqq k$ のとき　$a(j,k)=a(j,1)+(k-1)=\boldsymbol{(j-1)^2+k}$

$j<k$ のとき　$a(j,k)=a(1,k)-(j-1)=\boldsymbol{k^2-j+1}$

(3) $44^2<2008<45^2$ であるから．(2) の結果に注意して

$$2008=44^2+72=45^2-19+1$$

(2) の $j,\ k$ の大小関係に注意すると　$\boldsymbol{j=19,\ k=45}$

(4) (2) の結果により，$a(k,k)=(k-1)^2+k$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a(k,k)&=\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)^2+k\}\\ &=\frac{1}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\}+\frac{1}{2}n(n+1)\\ &=\frac{1}{6}n\{(n-1)(2n-1)+3(n+1)\}=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n^2+2)}\end{aligned}$$

■

3 (1) $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，$\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0, -1,\ 0)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x-2,\ y,\ z),\quad \overrightarrow{\mathrm{BP}} = (x,\ y+1,\ z)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} /\!/ \vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}} /\!/ \vec{v}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = t\vec{v}$ とおくと ($s,\ t$ は実数)

$$(x-2,\ y,\ z) = s(-1,\ 2,\ 5),\quad (x,\ y+1,\ z) = t(1,\ 1,\ 1)$$

したがって　$x = 2 - s = t,\quad y = 2s = -1 + t,\quad z = 5s = t$

上の第 1 式と第 2 式を連立すると　$s = \dfrac{1}{3},\ t = \dfrac{5}{3}$

これは，第 3 式の $s,\ t$ を満たす．よって　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right)$

(2) $\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$，$\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3} - c\right)$

$\vec{w} = (-1,\ 3,\ 1)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} \perp \vec{w}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \vec{w} = 0$ より

$$-1 \cdot \frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} + 1\left(\frac{5}{3} - c\right) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad c = 2$$

よって　　**C(0，0，2)**

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$，　$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (2,\ 0, -2)$，　$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = (0, -1, -2)$

これらを $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = a\overrightarrow{\mathrm{CA}} + b\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ に代入すると

$$\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = a(2,\ 0, -2) + b(0, -1, -2) = (2a, -b, -2a - 2b)$$

ゆえに　$2a = \dfrac{5}{3},\quad -b = \dfrac{2}{3},\quad -2a - 2b = -\dfrac{1}{3}$

上の第 1 式と第 2 式から　$a = \dfrac{5}{6},\ b = -\dfrac{2}{3}$

これらは第 3 式を満たしている．よって，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ と表される．

発展 3 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0, -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2)$ を通る平面の方程式は

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1 \quad \text{すなわち} \quad x - 2y + z - 2 = 0 \quad \cdots(*)$$

点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$ は，$(*)$ を満たすので，点 P は平面 ABC 上にある．　■

$\boxed{4}$ (1) $C: y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}$ より，$y' = x$ であるから，$x = p$ のとき，$y' = p$

C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における接線 l の傾きは p であるから，これに垂直で点 $\mathrm{Q}(p,\ 0)$ を通る直線 m の方程式は

$$y = -\frac{1}{p}(x-p) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{m : y = -\frac{x}{p} + 1}$$

(2) C および m の方程式から

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{x}{p} + 1\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{p} - \frac{1}{2}$$

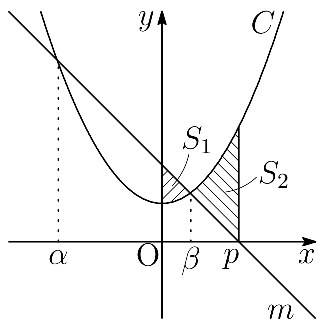
とおくと

$$f(0) = -\frac{1}{2} < 0, \quad f(p) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} > 0$$

$f(x)$ の x^2 の係数が正であるから，$f(x) = 0$ の解 $\alpha,\ \beta$ について $(\alpha < \beta)$

$$\alpha < 0 < \beta < p$$

(3) $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると



$$\begin{aligned} S_1 &= -\int_0^\beta f(x)\,dx = -\Big[\ F(x)\ \Big]_0^\beta \\ &= -F(\beta) + F(0), \\ S_2 &= \int_\beta^p f(x)\,dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_\beta^p \\ &= F(p) - F(\beta) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \{F(p) - F(\beta)\} - \{-F(\beta) + F(0)\} = F(p) - F(0) \\ &= \int_0^p f(x)\,dx = \int_0^p \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{p} - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \left[\ \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2p} - \frac{x}{2}\ \right]_0^p = \frac{p^3}{6} \end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $m=4$ となるのは，2 個とも 2 と書いた玉，または，1，3 と書いた玉のときであるから，求める確率は

$$\frac{{}_m\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_{8-m}\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{\frac{1}{2}m(m-1)+2(8-m)}{45}=\boldsymbol{\frac{m^2-5m+32}{90}}$$

(2) S を 3 で割った余りが 2 であるのは，2 個とも 1 と書いた玉，または，2，3 と書いた玉のときであるから，求める確率は

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2+{}_m\mathrm{C}_1\cdot{}_{8-m}\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1+m(8-m)}{45}=\boldsymbol{\frac{-m^2+8m+1}{45}}$$

(3) S を 3 で割った余りが 1 であるのは，$S=4$ であるのときに限る．よって，(1)，(2) の結果から，求める期待値 E は

$$\begin{aligned}E&=0\cdot P(S=0)+1\cdot P(S=1)+2\cdot P(S=2)\\&=0+1\cdot\frac{m^2-5m+32}{90}+2\cdot\frac{-m^2+8m+1}{45}\\&=\frac{m^2-5m+32+4(-m^2+8m+1)}{90}=\boldsymbol{\frac{-m^2+9m+12}{30}}\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から

$$m=\frac{1}{30}\left\{-\left(m-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{129}{4}\right\}$$

よって，E は $\boldsymbol{m=4,\ 5}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\frac{16}{15}}$ をとる． ■