

平成18年度 広島大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
教育(第一類・第二類(技術・情報系)・第四類(人間生活系))・
経済(昼)・歯(口腔健康科学(口腔保健))

問題 1 2 3 4 5

1 次の問いに答えよ.

- (1) $\sqrt{7}$ の小数部分を p とするとき, $\frac{3}{p} - p$ は整数であることを示し, その整数を求めよ.
- (2) $k > 0$ を定数とするとき, x についての方程式

$$\log_3 x = kx$$

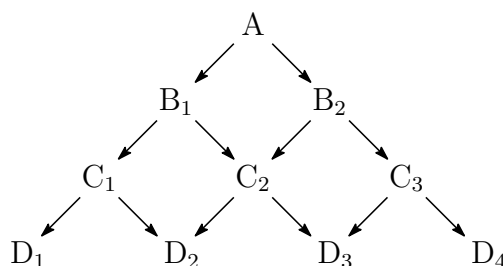
が二つの実数解 a と $3a$ をもつとする. このとき, k の値と a の値を求めよ.

2 $a_1 = 1$ と $a_{n+1} = 3a_n - n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定義される数列 $\{a_n\}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) p と q を定数とする. 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_n + pn + q$ によって定めると, $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列になるとする. このとき, 定数 p と q の値を求めよ.
- (2) a_n を n の式で表せ.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の和 $\sum_{k=1}^n a_k$ を n の式で表せ.

- 3 図の一番上の点 A から玉を落とす．玉はそれぞれの分岐点において，確率 p で左下に，確率 $1-p$ で右下に向かうものとする．また，この図の B_1, B_2 の段を 1 段目， C_1, C_2, C_3 の段を 2 段目として段数を数えるものとする． $0 < p < 1$ として，次の問いに答えよ．

- (1) 2 段目の点 C_1, C_2, C_3 に対して，玉がその点に落ちてくる確率を求めよ．
- (2) 2 段目の点のうち，点 C_2 に玉が落ちてくる確率が，他の点 C_1, C_3 の各点に落ちてくる確率のいずれより大きくなるとする．このとき， p の値の範囲を求めよ．
- (3) 3 段目の点のうち，点 D_3 に玉が落ちてくる確率が，他の点 D_1, D_2, D_4 の各点に落ちてくる確率のいずれよりも大きくなるとする．このとき， p の値の範囲を求めよ．



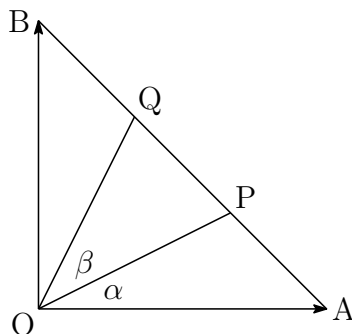
- 4 平面上で，ベクトル $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ は直交し， $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 1$ を満たすとする．線分 AB を 3 等分し，図のように，A に近い点を P，B に近い点を Q とする．また， $\angle AOP = \alpha$ ， $\angle POQ = \beta$ とする．次の問いに答えよ．

- (1) $\cos \alpha$ ， $\cos \beta$ の値を求めよ．
- (2) $\alpha < 30^\circ < \beta$ を示せ．
- (3) 線分 PQ 上に，点 R を

$$\vec{OR} = k\vec{OA} + (1-k)\vec{OB}$$

となるようにとる．このとき， $|\vec{OR}|^2$ を k の式で表せ．

- (4) (3) の R に対して， $\angle POR = \alpha$ となるとき， k の値を求めよ．



- 5 直線 $y = -2x + m$ が、放物線 $y = -\frac{1}{2}x^2 + ax$ ($a > 2$) に点 $P(p, q)$ で接している。連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq -\frac{1}{2}x^2 + ax \\ x \leq p \end{cases}$$

の表す領域の面積を S_1 とする。また、連立不等式

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + ax \leq y \leq -2x + m \\ 0 \leq x \leq p \end{cases}$$

の表す領域の面積を S_2 とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) a, m, q を p の式で表せ。
- (2) S_1 と S_2 を p の式で表せ。
- (3) $a > 2$ のとき、 $\frac{1}{2} < \frac{S_2}{S_1} < 2$ が成り立つことを示せ。

解答例

1 (1) $p = \sqrt{7} - 2$ であるから

$$\frac{3}{p} - p = \frac{3}{\sqrt{7} - 2} - (\sqrt{7} - 2) = (\sqrt{7} + 2) - (\sqrt{7} - 2) = 4$$

(2) 方程式 $\log_3 x = kx$ の二つの解が a と $3a$ であるから

$$\begin{cases} \log_3 a = ka & \cdots \textcircled{1} \\ \log_3 3a = 3ka & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

② より, $\log_3 a = 3ka - 1$ であるから, これを ① に代入すると

$$3ka - 1 = ka \quad \text{ゆえに} \quad ka = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

③ を ① に代入すると

$$\log_3 a = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a = \sqrt{3}$$

これを ③ に代入すると $k = \frac{1}{2\sqrt{3}}$



- 2** (1) $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列であるから

$$b_{n+1} = 3b_n$$

上式および $a_{n+1} = 3a_n - n$ の辺々の差をとると

$$b_{n+1} - a_{n+1} = 3(b_n - a_n) + n$$

$b_n = a_n + pn + q$ より $b_n - a_n = pn + q$ であるから

$$p(n+1) + q = 3(pn + q) + n \quad \text{ゆえに} \quad (2p+1)n - p + 2q = 0$$

上の第 2 式は, n に関する恒等式であるから

$$2p+1=0, \quad -p+2q=0 \quad \text{よって} \quad p = -\frac{1}{2}, \quad q = -\frac{1}{4}$$

- (2) $b_1 = a_1 + p + q = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列であるから

$$b_n = \frac{1}{4} \cdot 3^{n-1} = \frac{3^{n-1}}{4}$$

- (1) の結果より, $b_n = a_n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$ であるから

$$a_n = b_n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} = \frac{3^{n-1}}{4} + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$$

- (3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{3^{k-1}}{4} + \frac{1}{2}k + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{4}n \\ &= \frac{3^n - 1}{8} + \frac{1}{4}n(n+2) \end{aligned}$$



- 3** (1) C_1, C_2, C_3 に対して、玉が落ちてくる確率は、順に

$$p^2, \quad 2p(1-p), \quad (1-p)^2$$

- (2) (1) の結果により

$$p^2 < 2p(1-p) > (1-p)^2 \quad \text{ゆえに} \quad p < 2(1-p), \quad 2p > 1-p$$

$$\text{したがって} \quad 3p < 2, \quad 3p > 1 \quad \text{よって} \quad \frac{1}{3} < p < \frac{2}{3}$$

- (3) D_1, D_2, D_3, D_4 に対して、玉が落ちてくる確率は、順に

$$p^3, \quad 3p^2(1-p), \quad 3p(1-p)^2, \quad (1-p)^3$$

$$\text{条件より} \quad p^3 < 3p(1-p)^2, \quad 3p^2(1-p) < 3p(1-p)^2 > (1-p)^3$$

$$\text{したがって} \quad \begin{cases} p^2 < 3(1-p)^2 & \cdots \textcircled{1} \\ p < 1-p & \cdots \textcircled{2} \\ 3p > 1-p & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } 2p^2 - 6p + 3 > 0 \quad \text{すなわち} \quad p < \frac{3-\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{3+\sqrt{3}}{2} < p$$

$$\textcircled{2} \text{ より } p < \frac{1}{2}, \quad \textcircled{3} \text{ より } p > \frac{1}{4}$$

$$\text{これらの共通範囲を求めて} \quad \frac{1}{4} < p < \frac{1}{2}$$



- 4** (1) 座標平面上の点として, $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ とすると

$$P\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad Q\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{p} = 3\overrightarrow{OP}, \quad \vec{q} = 3\overrightarrow{OQ} \text{ とおくと}$$

$$\vec{a} = (1, 0), \quad \vec{p} = (2, 1), \quad \vec{q} = (1, 2)$$

$$\text{よって} \quad \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{p}}{|\vec{a}| |\vec{p}|} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| |\vec{q}|} = \frac{4}{5}$$

$$(2) \quad \frac{4}{5} > \frac{3}{4} > \frac{16}{25} \text{ より } \quad \frac{2}{\sqrt{5}} > \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{4}{5} \quad \text{ゆえに} \quad \cos \alpha > \cos 30^\circ > \cos \beta$$

$$\alpha, \beta \text{ は鋭角であるから} \quad \alpha < 30^\circ < \beta$$

$$(3) \quad \overrightarrow{OA} = (1, 0), \quad \overrightarrow{OB} = (0, 1). \quad \overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB} \text{ より}$$

$$\overrightarrow{OR} = k(1, 0) + (1-k)(0, 1) = (k, 1-k)$$

$$\text{よって} \quad |\overrightarrow{OR}|^2 = k^2 + (1-k)^2 = 2k^2 - 2k + 1 \quad \left(\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{2}{3} \right)$$

$$(4) \quad \tan \alpha = \frac{1}{2} \text{ より } \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{3}$$

$$R(k, 1-k) \text{ より, 直線 OR の傾きは } \frac{1-k}{k}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{1-k}{k} = \frac{4}{3} \quad \text{よって} \quad k = \frac{3}{7}$$

■

5 (1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + ax$ とおくと $f'(x) = -x + a$

放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = -2x + m$ は点 $P(p, q)$ で接するから

$$-\frac{1}{2}p^2 + ap = -2p + m = q, \quad -p + a = -2$$

第2式から $a = p - 2$ これを第1式に代入すると

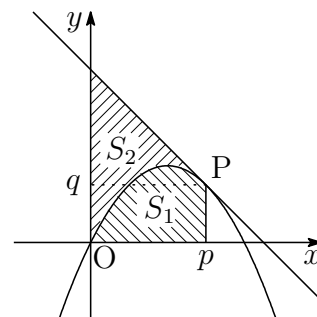
$$-\frac{1}{2}p^2 + (p-2)p = -2p + m = q$$

よって $m = \frac{1}{2}p^2, \quad q = \frac{1}{2}p^2 - 2p$

(2) 直線 $y = -2x + \frac{1}{2}p^2$ および

放物線 $y = -\frac{1}{2}x^2 + (p-2)x$ より

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^p \left\{ -\frac{1}{2}x^2 + (p-2)x \right\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}(p-2)x^2 \right]_0^p = \frac{1}{3}p^3 - p^2 \end{aligned}$$



$$-2x + \frac{1}{2}p^2 - \left\{ -\frac{1}{2}x^2 + (p-2)x \right\} = \frac{1}{2}(x-p)^2 \text{ であるから}$$

$$S_2 = \int_0^p \frac{1}{2}(x-p)^2 dx = \frac{1}{6} \left[(x-p)^3 \right]_0^p = \frac{1}{6}p^3$$

(3) $a > 2$ より $p - 2 > 2$ すなわち $p > 4 \dots \textcircled{1}$

(2) の結果から $\frac{S_1}{S_2} = 2 - \frac{6}{p}$

$\textcircled{1}$ より $\frac{1}{2} < 2 - \frac{6}{p} < 2$ したがって $\frac{1}{2} < \frac{S_1}{S_2} < 2$ よって $\frac{1}{2} < \frac{S_2}{S_1} < 2$

別解 $a > 2$ より, $p > 4$ であるから

$$2S_2 - S_1 = \frac{1}{3}p^3 - \left(\frac{1}{3}p^3 - p^2 \right) = p^2 > 0$$

$$2S_1 - S_2 = 2 \left(\frac{1}{3}p^3 - p^2 \right) - \frac{1}{6}p^3 = \frac{1}{2}p^2(p-4) > 0$$

よって $\frac{1}{2} < \frac{S_2}{S_1} < 2$

