

平成16年度 広島大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
 教育(第一類・第二類(技術・情報系)・第四類(人間生活系))・
 経済(昼)・歯(口腔健康科学(口腔保健))

問題 1 2 3 4 5

1 a, b を実数とする. x の方程式 $4^x + a \times 2^{x+1} + b = 0$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) $a = -1, b = -3$ のときの解を求めよ.
- (2) この方程式が異なる2つの実数解をもつような点 (a, b) 全体の集合を, 座標平面上に図示せよ.

2 $-180^\circ < x < 180^\circ$ とする. c を実数とする. x の方程式

$$(*) \quad \sin x + \sqrt{3} \cos x + c = 0$$

について, 次の問いに答えよ.

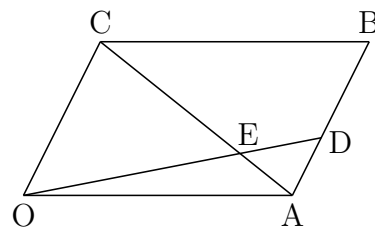
- (1) $(*)$ を $\sin(x+A) = B$ の形で表せ. また, $c = \sqrt{3}$ のとき, x の値を求めよ.
- (2) $(*)$ が異なる2つの解 α, β をもつための c の条件を求めよ.
- (3) $\tan \frac{x}{2} = t$ とおくとき,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

を示せ. さらに, $(*)$ を t の2次方程式で表せ.

- (4) (2) の条件のもとで, $\tan \frac{\alpha+\beta}{2}$ の値を求めよ.

- 3 平行四辺形 $OABC$ の辺 AB を $m:n$ に内分する点を D とし、線分 OD と対角線 AC との交点を E とする。次の問いに答えよ。



- (1) 公式 $\overrightarrow{OD} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$ を証明せよ。
- (2) $\overrightarrow{OE}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, m , n を用いて表せ。
- (3) 4点 O , A , B , C を xy 平面上の点とし、3点 O , A , C の座標を $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $C(a, b)$ とする。ただし、 a , b は正の数とする。 $m=1$, $n=2$ のとき、2点 O , D を通る直線の方程式を求めよ。
- (4) (3) の条件のもとで、点 C から線分 OD に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

「点 C から線分 OD に下ろした垂線の足 H 」とは、点 C からひいた線分 OD への垂線と線分 OD との交点 H のことである。

- 4 $f(x) = x^2 - 4x + 5$ とする。 $p < 2 < q$ とし、放物線 $y = f(x)$ 上の2点 $P(p, f(p))$, $Q(q, f(q))$ における接線を、それぞれ l , m とする。 l と m は点 $R(\frac{5}{2}, r)$ で交わり、それぞれの傾きを a , b とするとき、

$$2a + b = 0$$

を満たすものとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) p , q , r を求めよ。
- (2) 接線 l , m の方程式を求めよ。
- (3) 放物線 $y = f(x)$ と2つの接線 l , m で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

5 1, 2, 3, 4, 5の数字を書いた5枚のカードがある. この5枚のカードを並べて5けたの数を作るとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 偶数となる並べ方は何通りあるか. また, 奇数となる並べ方は何通りあるか.
- (2) 5枚のカードをよく切って並べたとき, それが54321 とちょうど3つの位で一致する確率を求めよ.
「それが54321 とちょうど3つの位で一致する」とは, たとえば, “52341” は54321 とちょうど3つの位で一致するが, “54321” は54321 とちょうど3つの位で一致するとは言わない. (3)・(4)においても同様の意味とする.
- (3) 5枚のカードをよく切って並べたとき, それが54321 とちょうど2つの位で一致する確率を求めよ.
- (4) 5枚のカードを並べた数が, 54321 と一致したときに6万円, 54321 とちょうど3つの位で一致したときに6千円, 54321 とちょうど2つの位で一致したときに600円もらえるものとする. これらの場合以外は何ももらえないものとする. 5枚のカードをよく切って並べる1回の試行での期待金額を求めよ.

解答例

- 1** (1) 方程式 $4^x + a \times 2^{x+1} + b = 0$ について, $t = 2^x$ とおくと $t > 0$

$$t^2 + 2at + b = 0 \quad \cdots (*)$$

$$a = -1, b = -3 \text{ のとき } t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0 \quad \text{ゆえに } t = 3 \quad \text{すなわち } x = \log_2 3$$

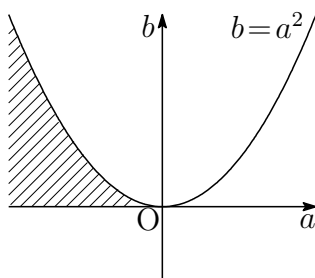
- (2) (*) が異なる 2 つの正の解をもてばよい. (*) の 2 つの解を t_1, t_2 とすると, 解と係数について

$$D/4 = a^2 - b > 0, \quad t_1 + t_2 = -2a > 0, \quad t_1 t_2 = b > 0$$

したがって, 点 (a, b) は, 不等式

$$b < a^2, \quad a < 0, \quad b > 0$$

の表す領域で, 下の図の斜線部分で境界線を含まない.



■

2 (1) (*) $\sin x + \sqrt{3} \cos x + c = 0$

(*) より $2 \sin(x + 60^\circ) + c = 0$ よって $\sin(x + 60^\circ) = -\frac{c}{2} \dots (*)$

$c = \sqrt{3}$ のとき $\sin(x + 60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (-180^\circ < x < 180^\circ)$

$-120^\circ < x + 60^\circ < 240^\circ$ であるから

$$x + 60^\circ = -60^\circ \quad \text{よって} \quad x = -120^\circ$$

(2) (*) が $-180^\circ < x < 180^\circ$ において、異なる 2 つの解をもつ条件であるから

$$-1 < -\frac{c}{2} < 1, \quad -\frac{c}{2} \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって $-2 < c < 2, \quad c \neq \sqrt{3}$

(3) $\tan \frac{x}{2} = t$ であるから

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

これらを (*) に代入すると

$$\frac{2t}{1+t^2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + c = 0$$

t について整理すると (**) $(c - \sqrt{3})t^2 + 2t + c + \sqrt{3} = 0$

(4) α, β が (*) の解であるとき, $\tan \frac{\alpha}{2}, \tan \frac{\beta}{2}$ が (**) の解である.

したがって, 解と係数に関係により

$$\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} = -\frac{2}{c - \sqrt{3}}, \quad \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \frac{c + \sqrt{3}}{c - \sqrt{3}}$$

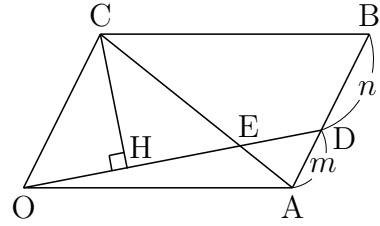
よって

$$\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}} = \frac{-\frac{2}{c - \sqrt{3}}}{1 - \frac{c + \sqrt{3}}{c - \sqrt{3}}} = \frac{-2}{c - \sqrt{3} - c - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

■

- 3 (1) $\overrightarrow{AD} = \frac{m+n}{m}\overrightarrow{AB}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}\end{aligned}$$



- (2) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ を (1) の結果に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \frac{n\overrightarrow{OA} + m(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})}{m+n} = \frac{(m+n)\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OC}}{m+n} \\ &= \frac{2m+n}{m+n} \cdot \frac{(m+n)\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OC}}{2m+n}\end{aligned}$$

よって $\overrightarrow{OE} = \frac{(m+n)\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OC}}{2m+n}$

- (3) $m=1, n=2, \overrightarrow{OA} = (1, 0), \overrightarrow{OC} = (a, b)$ および (2) の結果から、直線 OD の方向ベクトルを $\vec{v}$ とすると

$$\vec{v} = 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 3(1, 0) + (a, b) = (a+3, b)$$

よって、直線 OD の方程式は $bx - (a+3)y = 0$

- (4) $\overrightarrow{OC} \cdot \vec{v} = a(a+3) + b^2 = a^2 + 3a + b^2$ であるから

$$\overrightarrow{OH} = \frac{(\overrightarrow{OC} \cdot \vec{v})\vec{v}}{|\vec{v}|^2} = \frac{a^2 + 3a + b^2}{(a+3)^2 + b^2}(a+3, b)$$

よって $\mathbf{H} \left(\frac{(a^2 + 3a + b^2)(a+3)}{(a+3)^2 + b^2}, \frac{(a^2 + 3a + b^2)b}{(a+3)^2 + b^2} \right)$ ■

4 (1) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ より $f'(x) = 2x - 4$

$$a = f'(p) = 2p - 4, \quad b = f'(q) = 2q - 4$$

上の2式を条件 $2a + b = 0$ に代入すると

$$2(2p - 4) + 2q - 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 2p + q = 6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

放物線 $y = f(x)$ 上の点 $P(p, f(p))$ における接線の方程式は

$$y - (p^2 - 4p + 5) = (2p - 4)(x - p)$$

すなわち $l: y = (2p - 4)x - p^2 + 5$

同様に、放物線 $y = f(x)$ 上の点 $Q(q, f(q))$ における接線の方程式は

$$m: y = (2q - 4)x - q^2 + 5$$

2直線 l, m から y を消去すると ($p < 2 < q$)

$$(2p - 4)x - p^2 + 5 = (2q - 4)x - q^2 + 5 \quad \text{ゆえに} \quad (p - q)(2x - p - q) = 0$$

$p \neq q$ より、 $x = \frac{p+q}{2}$ が点 R の x 座標 $\frac{5}{2}$ であるから

$$\frac{p+q}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{ゆえに} \quad p + q = 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② を解くと $p = 1, q = 4$

したがって $l: y = -2x + 4, \quad m: y = 4x - 11$

これらの2直線の交点の x 座標が $\frac{5}{2}$ であるから、その y 座標 r は

$$r = -1$$

(2) (1) の結果から $l: y = -2x + 4, \quad m: y = 4x - 11$

(3) (1), (2) の結果から、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\frac{5}{2}} \{(x^2 - 4x + 5) - (-2x + 4)\} dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 \{(x^2 - 4x + 5) - (4x - 11)\} dx \\ &= \int_1^{\frac{5}{2}} (x - 1)^2 dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 (x - 4)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - 1)^3 \right]_1^{\frac{5}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x - 4)^3 \right]_{\frac{5}{2}}^4 = \frac{9}{4} \end{aligned}$$



- 5** (1) 偶数となるのは1の位が2または4の場合であるから

$$2 \times 4! = 48 \text{ (通り)}$$

奇数となるのは1の位が1, 3, 5のいずれかの場合であるから

$$3 \times 4! = 72 \text{ (通り)}$$

- (2) カードの並べ方の総数は5!通り. 一致する3つの位の選び方は ${}_5C_3$ 通り. 残りの2つが一致しない並べ方は1通りであるから, 求める確率は

$$\frac{{}_5C_3 \times 1}{5!} = \frac{1}{12}$$

- (3) 一致する2つの位の選び方は ${}_5C_2$ 通り. 残りの3つが一致しない並べ方は次のように2通りある.

a	b	c
b	c	a
c	a	b

よって, 求める確率は

$$\frac{{}_5C_2 \times 2}{5!} = \frac{1}{6}$$

- (4) 5つの位がすべて一致する確率は $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$

これと (2), (3) の結果から, 求める期待金額は

$$\begin{aligned} & 60000 \times \frac{1}{120} + 6000 \times \frac{1}{12} + 600 \times \frac{1}{6} \\ &= 500 + 500 + 100 = 1100 \text{ (円)} \end{aligned}$$

