平成 15 年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・経済 (昼)・歯 (口腔健康科学 (口腔保健))

問題 1 2 3 4 5

1 2 次関数 $y = 3ax^2 - 2(b+1)x + b + 1$ のグラフ F について，次の問いに答えよ．

(1) a, b をともに 1 から 6 までの整数とするとき，F と x 軸との共有点の個数がただ 1 つであるような定数 a, b の値の組をすべて求めよ．

(2) さいころを続けて 2 回投げ，定数 a, b の値を 1 回目に出た目の数を a，2 回目に出た目の数を b と決める．このとき，F と x 軸との共有点の個数の期待値 E を求めよ．

2 三角形 ABC において，辺 BC を 2 : 1 の比に内分する点を M とする．辺 AB，AC をそれぞれ B，C の側に延長した半直線を l，m とし，M を通る直線 k と l，m との交点をそれぞれ P，Q とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = p\vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = q\vec{c}$$

とおくとき，次の問いに答えよ．ただし，p，q は正の実数とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{q} = 3$ が成り立つことを示せ．

(3) Q から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB との交点を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，q で表せ．

(4) M を通る直線 k が半直線 l，m と点 A 以外でそれぞれ交わるように変わるとき，三角形 APQ の面積を最小にする p，q の値を求めよ．

3 次の問いに答えよ．

(1) a，b，c，d を正の整数とする．$(a + b\sqrt{2})^2 = (c + d\sqrt{2})^2$ ならば，$a = c$，$b = d$ であることを示せ．ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いてよい．

(2) 次の 2 つの数 r，s はそれぞれ，a，b を正の整数として，$(a + b\sqrt{2})^2$ と表すことができるか．表すことができれば，a，b の値を求めよ．表すことができなければ，その理由を示せ．

$$r = 967 + 384\sqrt{2}, \quad s = 2107 + 1470\sqrt{2}$$

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ．

(1) a を 0 でない実数とするとき，2 つの曲線 $y=-x^2+2x$ と $y=-ax^2+1$ が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で 2 つの交点をもつように a の範囲を定めよ．

(2) a_0 を (1) で求めた a の範囲の最大値とするとき，定積分

$$I=\int_0^2 \left|(-a_0x^2+1)-(-x^2+2x)\right| dx$$

を求めよ．

$\boxed{5}$ 不等式

$$\log_a b+\log_a(k-b)>2$$

を満たす実数 a，b について，次の問いに答えよ．ただし，k は $k>2$ を満たす定数とする．

(1) 点 $(a,\ b)$ 全体の集合を ab 平面上に図示せよ．

(2) $a+b$ がとる値の範囲を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $F : y = 3ax^2 - 2(b+1)x + b + 1$ より

$$\begin{aligned} y &= 3a\left(x - \frac{b+1}{3a}\right)^2 - \frac{(b+1)^2}{3a} + b + 1 \\ &= 3a\left(x - \frac{b+1}{3a}\right)^2 + \frac{(b+1)(3a-b-1)}{3a} \qquad (*) \end{aligned}$$

a，b は 1 から 6 までの整数であるから，F と x 軸との共有点の個数が 1 つである条件は

$$3a - b - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = 3a - 1$$

よって　　$\boldsymbol{(a,\ b) = (1,\ 2),\ (2,\ 5)}$

(2) F が x 軸と異なる 2 点を共有する条件は

$$3a - b - 1 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad b > 3a - 1$$

これを満たす $(a,\ b)$ は，次の 5 組である．

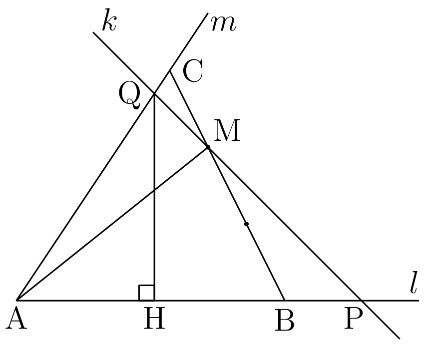
$$(a,\ b) = (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (2,\ 6)$$

よって，求める期待値 E は

$$E = 0 \times \left(1 - \frac{2}{36} - \frac{5}{36}\right) + 1 \times \frac{2}{36} + 2 \times \frac{5}{36} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

■

2 (1) M は辺 BC を 2 : 1 に内分する点であるから　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{2}{3}\vec{c}}$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = p\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = q\vec{c}$ より

$$\vec{b} = \frac{1}{p}\overrightarrow{\mathrm{AP}}, \quad \vec{c} = \frac{1}{q}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

これらを (1) の結果に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{3p}\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \frac{2}{3q}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

M は線分 PQ 上の点であるから

$$\frac{1}{3p} + \frac{2}{3q} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{p} + \frac{2}{q} = 3$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = \dfrac{q(\vec{b}\cdot\vec{c})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{QH}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}} - \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \boldsymbol{\frac{q(\vec{b}\cdot\vec{c})}{|\vec{b}|^2}\vec{b} - q\vec{c}}$$

(4) $\triangle\mathrm{APQ} = pq\triangle\mathrm{ABC}$ であるから，pq を最小にする p，q の値を求めればよい．(2) の結果および相加平均・相乗平均の大小関係により

$$3 = \frac{1}{p} + \frac{2}{q} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{p}\cdot\frac{2}{q}} \quad \text{ゆえに} \quad pq \geqq \frac{8}{9}$$

$\dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{q}$ のとき，pq は最小となる．このとき，(2) の結果から

$$\frac{1}{p} = \frac{2}{q} = \frac{3}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p = \frac{2}{3},\ \ q = \frac{4}{3}}$$

■

3 (1) a，b，c，d は正の整数で，$(a+b\sqrt{2})^2=(c+d\sqrt{2})^2$ より

$$a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad a-c=(d-b)\sqrt{2} \quad \cdots①$$

$d-b\neq 0$ と仮定すると $\dfrac{a-c}{d-b}=\sqrt{2}$

① の左辺は有理数，右辺が無理数となり矛盾．

したがって　$d-b=0$　ゆえに　$a-c=0$　よって　$a=c,\ b=d$

(2)
$$(a+b\sqrt{2})^2=a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}$$

$r=967+384\sqrt{2}$ について，$r=(a+b\sqrt{2})^2$ を満たす正の整数 a，b が存在すると仮定すると

$$(*)\quad a^2+2b^2=967,\quad ab=192=3{\cdot}2^6$$

$(*)$ の第 1 式より a は奇数であるから，第 2 式より

$$(a,\ b)=(1,\ 192),\ (3,\ 64)$$

これらは，$(*)$ の第 1 式を満たさない．

よって，$r=(a+b\sqrt{2})^2$ となる，正の整数 a, b は存在しない．

次に $s=2107+1470\sqrt{2}$ について，$s=(a+b\sqrt{2})^2$ を満たす正の整数 a，b が存在すると仮定すると

$$(**)\quad a^2+2b^2=7^2{\cdot}43,\quad ab=735=3{\cdot}5{\cdot}7^2$$

$(**)$ の第 2 式から，a または b の少なくとも 1 つは 7 の倍数である．このとき，a が 7 の倍数であると仮定すると，$(**)$ の第 1 式より，b も 7 の倍数である．また，b が 7 の倍数であると仮定しても，同様に a も 7 の倍数である．$a=7p$，$b=7q$ とおいて，$(**)$ に代入すると

$$p^2+2q^2=43,\quad pq=3{\cdot}5$$

これを満たす整数 p，q は　$(p,\ q)=(5,\ 3)$

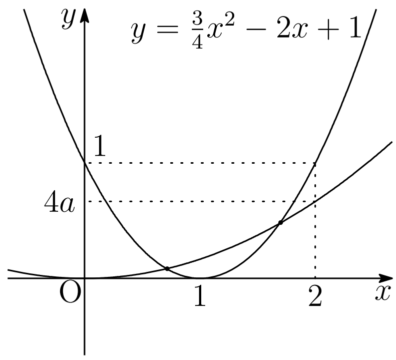
よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=(35,\ 21)}$　■

4 (1) $y=-x^2+2x$ と $y=-ax^2+1$ から y を消去すると

$$-x^2+2x=-ax^2+1$$

ゆえに　$ax^2=(x-1)^2$

与えられた2曲線が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で2つの交点をもつとき，2つの放物線 $y=ax^2$ と $y=(x-1)^2$ がこの範囲で2つの交点をもつから

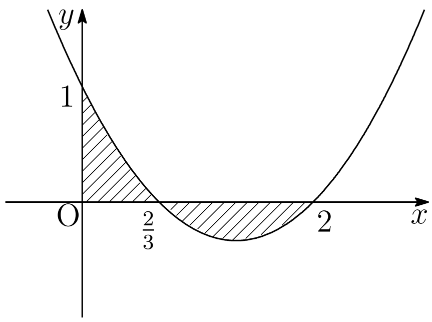


$$0<4a \leqq 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{0<a \leqq \frac{1}{4}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left\{\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)-(-x^2+2x)\right\} dx \\ &= \int_0^2 \left|\frac{3}{4}x^2-2x+1\right| dx = \frac{3}{4}\int_0^2 \left|\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-2)\right| dx \end{aligned}$$

I は，下の図の斜線部分の面積である．



$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{4}x^2-2x+1\right) dx + \frac{3}{4}\int_{\frac{2}{3}}^2 \left(x-\frac{2}{3}\right)(2-x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^3-x^2+x\right]_0^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\left(2-\frac{2}{3}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{16}{27}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{5}$ (1) 不等式 $\log_a b + \log_a(k-b) > 2$ より　$\log_a b(k-b) > \log_a a^2$

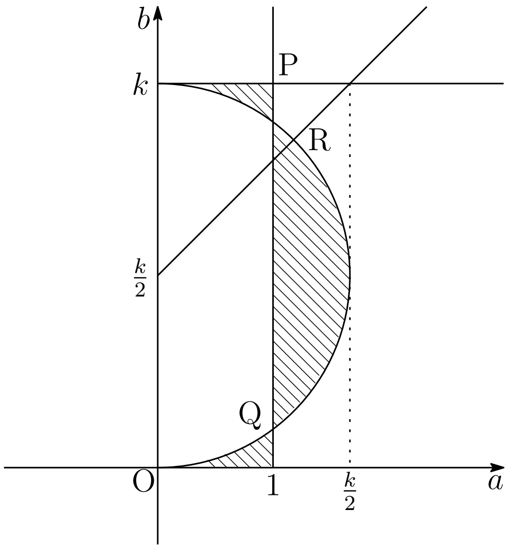
(i) $0 < a < 1$ のとき

$$b(k-b) < a^2 \quad \text{すなわち} \quad a^2 + \left(b - \frac{k}{2}\right)^2 < \frac{k^2}{4}$$

(ii) $1 < a$ のとき

$$b(k-b) > a^2 \quad \text{すなわち} \quad a^2 + \left(b - \frac{k}{2}\right)^2 > \frac{k^2}{4}$$

よって，点 $(a,\ b)$ の表す領域は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．



(2) 上の図の 3 点 P，Q，R の座標は

$$\mathrm{P}(1,\ k),\quad \mathrm{Q}\left(1,\ \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}\right),\quad \mathrm{R}\left(\frac{k}{2\sqrt{2}},\ \frac{k}{2} + \frac{k}{2\sqrt{2}}\right)$$

点 $(a,\ b)$ が 3 点 P，Q，R と一致するときの $a+b$ の値はそれぞれ

$$1+k, \quad 1 + \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}, \quad \frac{k}{2} + \frac{k}{\sqrt{2}}$$

$1 + k \geqq \dfrac{k}{2} + \dfrac{k}{\sqrt{2}}$，すなわち，$\boldsymbol{2 < k \leqq 2(\sqrt{2}+1)}$ のとき

$$\boldsymbol{0 < a + b < 1 + k, \quad a + b \neq 1 + \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}}$$

$1+k \leqq \dfrac{k}{2}+\dfrac{k}{\sqrt{2}}$，すなわち，$\boldsymbol{2(\sqrt{2}+1) \leqq k}$ のとき

$$\boldsymbol{0 < a+b < \frac{k}{2}+\frac{k}{\sqrt{2}}, \quad a+b \neq 1+\frac{k}{2}-\sqrt{\frac{k^2}{4}-1}}$$

■