令和７年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

問題 1 2 3 4 5

1 $\alpha,\ r$ を $\alpha > 1,\ r > 1$ を満たす実数とする．数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \alpha$ で公比が r の等比数列とする．数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \log_{a_n}(a_{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．

(1) b_n を n と $\log_\alpha r$ を用いて表せ．

(2) 等式

$$b_n = \frac{n+2}{n+1}$$

がすべての自然数 n について成り立つための必要十分条件を r と α を用いて表せ．

(3) (2) の条件が成り立つとき，積 $a_1a_2,\ a_1a_2a_3,\ a_1a_2a_3a_4$ の整数部分がそれぞれ 2 桁，3 桁，4 桁になるような α の範囲を求めよ．

2 円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ を考える．実数 $p,\ q$ が $p^2 + q^2 > 1$ を満たすとき，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から C_1 に引いた 2 本の接線 $\ell_1,\ \ell_2$ の接点をそれぞれ $\mathrm{Q}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}_2(x_2,\ y_2)$ とする．また，座標平面上の原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする．

(1) 直線 $\ell_1,\ \ell_2$，線分 OQ_1，OQ_2 で囲まれた四角形の面積 S を $p,\ q$ を用いて表せ．

(2) 点 P が楕円

$$C_2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$$

の上を動くとき，(1) の四角形の面積 S の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{3}$ 実数 a および自然数 n に対して，定積分

$$I(a,\ n) = \int_0^{2\pi} e^{ax} \sin(nx)\, dx$$

を考える．ここで e は自然対数の底である．

(1) $I(a,\ n)$ を求めよ．

(2) $a_n = \dfrac{\log n}{2\pi}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ のとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(a_n,\ n)$ を求めよ．ただし，$\log n$ は n の自然対数である．また，必要ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$ であることを用いてもよい．

$\boxed{4}$ a を正の実数とする．

(1) a が 1 でないとき，複素数 z についての方程式

$$a|z-1| = |(a-2)z + a|$$

を考える．この方程式を満たす z 全体の集合を複素数平面上に図示せよ．

(2) 方程式

$$|z|^2 = 6 - a, \quad a|z-1| = |(a-2)z + a|$$

をともに満たす複素数 z が存在するような a の範囲を求めよ．

$\boxed{5}$ n を 3 以上の整数とする．

(1) k を整数とする．$k < a < b < c \leqq k + n$ を満たす整数 $a,\ b,\ c$ の選び方の総数を n の式で表せ．

(2) $1 \leqq a < b < c \leqq 2n$ を満たす整数 $a,\ b,\ c$ のうち，$a + b > c$ となる $a,\ b,\ c$ の選び方の総数を L とする．このとき，$L > {}_n\mathrm{C}_3$ であることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 α，公比 r の等比数列であるから $(\alpha > 1,\ r > 1)$

$$a_n = \alpha\cdot r^{n-1} \tag{$*$}$$

$b_n = \log_{a_n}(a_{n+1})$ より

$$b_n = \frac{\log_\alpha a_{n+1}}{\log_\alpha a_n} = \frac{\log_\alpha(\alpha\cdot r^n)}{\log_\alpha(\alpha\cdot r^{n-1})} = \boldsymbol{\frac{1+n\log_\alpha r}{1+(n-1)\log_\alpha r}}$$

(2) $b_n = \dfrac{n+2}{n+1} = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ であり，また (1) の結果より

$$b_n = 1 + \frac{\log_\alpha r}{1+(n-1)\log_\alpha r} = 1 + \frac{1}{n + \frac{1}{\log_\alpha r} - 1}$$

上の 2 式は n に関する恒等式であるから $\dfrac{1}{\log_\alpha r} - 1 = 1$

$$\frac{1}{\log_\alpha r} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_\alpha r = \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\alpha = r^2}$$

(3) (2) の結果を $(*)$ に代入すると $a_n = r^{n+1}$

$$\begin{aligned} &a_1a_2 = r^2\cdot r^3 = r^5, \\ &a_1a_2a_3 = (a_1a_2)a_3 = r^5\cdot r^4 = r^9, \\ &a_1a_2a_3a_4 = (a_1a_2a_3)a_4 = r^9\cdot r^5 = r^{14} \end{aligned}$$

条件から $\quad 10 \leqq r^5 < 10^2 \leqq r^9 < 10^3 \leqq r^{14} < 10^4$

$$10^{\frac{1}{5}} \leqq r < 10^{\frac{2}{5}} \quad \text{かつ} \quad 10^{\frac{2}{9}} \leqq r < 10^{\frac{1}{3}} \quad \text{かつ} \quad 10^{\frac{3}{14}} \leqq r < 10^{\frac{2}{7}}$$

$\max\left\{\dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{9},\ \dfrac{3}{14}\right\} = \dfrac{2}{9}$，$\min\left\{\dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{7}\right\} = \dfrac{2}{7}$ であるから

$$10^{\frac{2}{9}} \leqq r < 10^{\frac{2}{7}} \quad \text{ゆえに} \quad 10^{\frac{4}{9}} \leqq r^2 < 10^{\frac{4}{7}}$$

(2) の結果から $\quad \boldsymbol{10^{\frac{4}{9}} \leqq \alpha < 10^{\frac{4}{7}}}$ ■

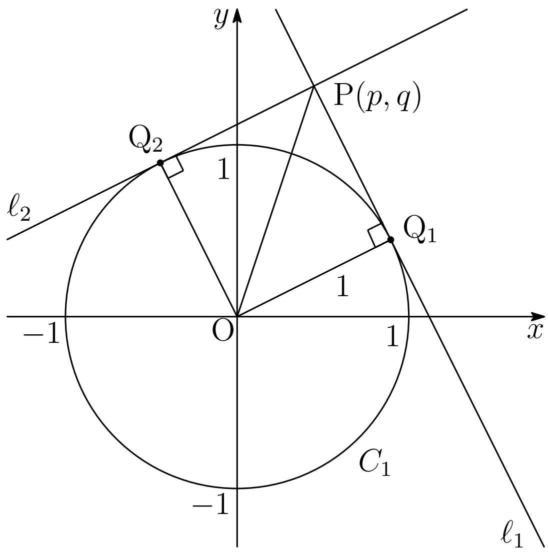
2 (1) $\mathrm{PQ_1} = \sqrt{\mathrm{OP}^2 - \mathrm{OQ_1}^2}$
$= \sqrt{p^2+q^2-1}$

$\triangle\mathrm{OPQ_1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{PQ_1}\cdot\mathrm{OQ_1}$ より

$$\triangle\mathrm{OPQ_1} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2-1}$$

求める面積を S とすると

$$S = 2\triangle\mathrm{OPQ_1} = \boldsymbol{\sqrt{p^2+q^2-1}}$$



別解 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を極とする円 $C_1 : x^2+y^2=1$ の極線 $\mathrm{Q_1Q_2} : px+qy=1$ に原点 O から引いた垂線の長さを d とすると

$$d = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Q_1Q_2} = 2\sqrt{1-d^2}$$

$\mathrm{OP}\perp\mathrm{Q_1Q_2}$ より，求める面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{Q_1Q_2}\cdot\mathrm{OP} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-d^2}\sqrt{p^2+q^2} = \boldsymbol{\sqrt{p^2+q^2-1}}$$

(2) 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は楕円 $C_2 : \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上の点であるから

$$\frac{p^2}{2}+\frac{q^2}{3}=1 \quad \text{ゆえに} \quad q^2 = 3-\frac{3}{2}p^2 \quad (0 \leqq p^2 \leqq 2)$$

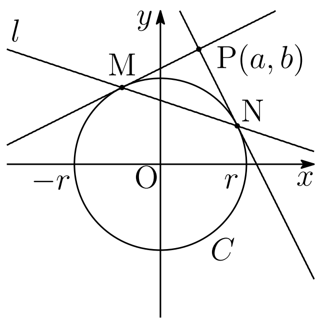
これを (1) の結果に代入すると

$$S = \sqrt{2-\frac{1}{2}p^2} \quad (0 \leqq p^2 \leqq 2) \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leqq S \leqq \sqrt{2}$$

よって　　**最大値 $\sqrt{2}$，最小値 1** ■

円の極線

円 C : $x^2+y^2=r^2$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた 2 本の接線の接点を $\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{N}(x_2,\ y_2)$ とする．2 本の接線



$$x_1x+y_1y=r^2,\quad x_2x+y_2y=r^2$$

は点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るから

$$ax_1+by_1=r^2,\quad ax_2+by_2=r^2$$

上の 2 式から直線 $l:\boldsymbol{ax+by=r^2}$ は 2 点 M，N を通る．
このとき，l を P を極とする C の極線という．

極線の方程式

2 次曲線に対して，$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ から 2 本の接線を引けるとし，その接点を A，B とおく．直線 AB を極 P に対する極線という．

- 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の極線の方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1}$
- 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の極線の方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1}$
- 放物線 $x^2=4py$ の極線の方程式は　$\boldsymbol{x_1x=2p(y+y_1)}$
- 放物線 $y^2=4px$ の極線の方程式は　$\boldsymbol{y_1y=2p(x+x_1)}$

注意　2 次曲線上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式と一致している．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $e^{ax}\sin nx$, $e^{ax}\cos nx$ をそれぞれ微分すると

$$(e^{ax}\sin nx)' = e^{ax}(n\cos nx + a\sin nx) \quad \cdots ①$$
$$(e^{ax}\cos nx)' = e^{ax}(a\cos nx - n\sin nx) \quad \cdots ②$$

① $\times a -$ ② $\times n$ から

$$\{e^{ax}(a\sin nx - n\cos nx)\}' = (a^2+n^2)e^{ax}\sin nx$$

n は自然数であるから

$$\begin{aligned} I(a,\ n) &= \int_0^{2\pi} e^{ax}\sin nx \\ &= \frac{1}{a^2+n^2}\Big[\ e^{ax}(a\sin nx - n\cos nx)\ \Big]_0^{2\pi} \\ &= \boldsymbol{\frac{n(1-e^{2\pi a})}{a^2+n^2}} \end{aligned}$$

(2) $a_n = \dfrac{\log n}{2\pi}$ より　$2\pi a_n = \log n$　ゆえに　$e^{2\pi a_n} = n$

(1) の結果から　$I(a_n,\ n) = \dfrac{n(1-e^{2\pi a_n})}{{a_n}^2+n^2} = \dfrac{n(1-n)}{\left(\dfrac{\log n}{2\pi}\right)^2 + n^2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} I(a_n,\ n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}-1}{\dfrac{1}{4\pi^2}\left(\dfrac{\log n}{n}\right)^2+1} = \frac{0-1}{0+1} = \mathbf{-1}$$

解説 $f(x)=\cos x+i\sin x$ とおくと (i は虚数単位)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x+i\cos x \\ &= i(\cos x+i\sin x)=if(x) \end{aligned}$$

$f(0)=1$，$f'(x)-if(x)=0$ を解くと，$f'(x)e^{-ix}-if(x)e^{-ix}=0$ より

$$f'(x)e^{-ix}+f(x)(e^{-ix})'=0 \quad \text{ゆえに} \quad \{f(x)e^{-ix}\}'=0$$

上の第 2 式を積分すると　　$f(x)e^{-ix}=C$　(C は積分定数)

$f(0)=1$ より，$C=1$ であるから　　$f(x)=e^{ix}$

したがって，次を得る．

オイラーの公式

$$\boldsymbol{e^{ix}=\cos x+i\sin x}$$

$e^{i\pi}=-1$ であるから，n が整数のとき，$e^{2ni\pi}=(e^{i\pi})^{2n}=1$ より

$$\int_0^{2\pi} e^{(a+in)x}\,dx=\frac{1}{a+in}\Big[\,e^{(a+in)x}\,\Big]_0^{2\pi}=\frac{a-in}{a^2+n^2}(a^{2\pi a}-1)$$

$e^{(a+in)x}=e^{ax}(\cos nx+i\sin nx)$ であるから，複素数の相等により

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{ax}\cos nx\,dx &= \frac{a}{a^2+n^2}(e^{2\pi a}-1), \\ \int_0^{2\pi} e^{ax}\sin nx\,dx &= \frac{-n}{a^2+n^2}(e^{2\pi a}-1) \end{aligned}$$

補足 $g(x)=2\sqrt{x}-\log x$ とすると　$g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

$g(1)=2$，$x>1$ において $g'(x)>0$ であるから

$$x>1 \text{ において} \quad g(x)>g(1)=2>0 \quad \text{ゆえに} \quad 2\sqrt{x}>\log x$$

$x>1$ のとき　　$0<\dfrac{\log x}{x}<\dfrac{2\sqrt{x}}{x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$ であるから，はさうみちの原理により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

■

$\boxed{4}$ (1) $(*)$ $a|z-1|=|(a-2)z+a|$ について，$a>0$ より

$$|z-1|=\left|\left(1-\frac{2}{a}\right)z+1\right|$$

$t=1-\dfrac{2}{a}$ とおくと　$|z-1|=|tz+1|$

$$(z-1)(\overline{z}-1)=(tz+1)(t\overline{z}+1)$$

$$|z|^2-(z+\overline{z})=t^2|z|^2+t(z+\overline{z})$$

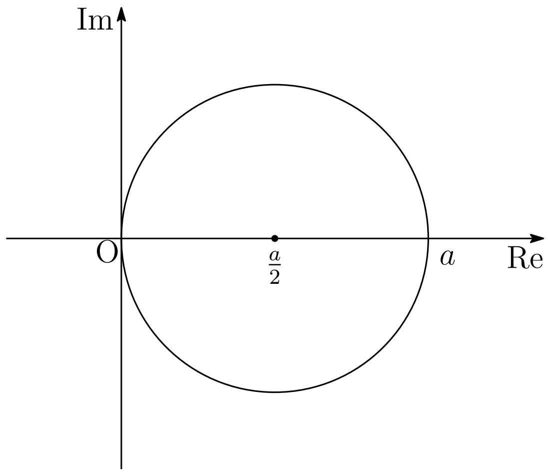
整理すると　$(t+1)\{(t-1)|z|^2+(z+\overline{z})\}=0$

$a\neq 1$ であるから　$t+1=\dfrac{2(a-1)}{a}\neq 0$，$t-1=-\dfrac{2}{a}$ より

$$-\frac{2}{a}|z|^2+(z+\overline{z})=0 \quad ゆえに \quad |z|^2-\frac{a}{2}(z+\overline{z})=0$$

上の第2式から　$\left|z-\dfrac{a}{2}\right|^2=\dfrac{a^2}{4}$　すなわち　$\left|z-\dfrac{a}{2}\right|=\dfrac{a}{2}$

よって，点 z の表す図形は，**点 $\boldsymbol{\dfrac{a}{2}}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\dfrac{a}{2}}$ の円**



(2) (i) $a=1$ のとき，$(*)$ の両辺は等しい．このとき，z は複素数平面上のすべての点を表す．このとき

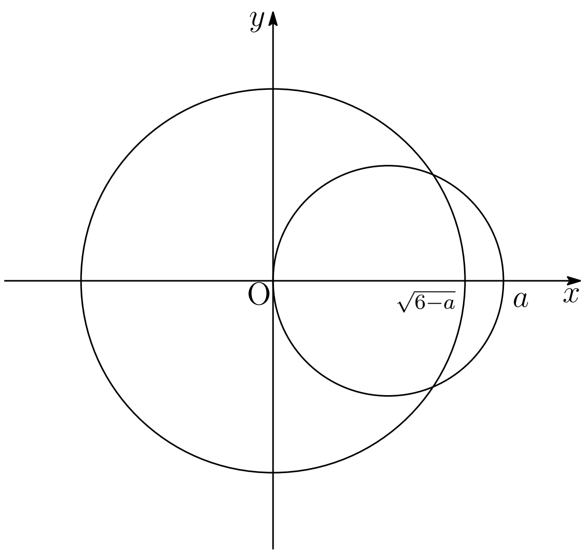
$$|z|^2 = 6-a,\quad a|z-1| = |(a-2)z+a| \qquad (**)$$

の 2 式を同時満たす z は，$|z|=\sqrt{5}$ である．

(ii) $a \neq 1$ のとき，$(**)$ の 2 式をともに満たす z が存在するのは

$$\sqrt{6-a} \leqq a \quad \text{ゆえに} \quad 6-a \geqq 0,\ \ (a+3)(a-2) \geqq 0$$

$a>0,\ a\neq 1$ に注意してこれを解くと　$2 \leqq a \leqq 6$



(i)，(ii) から　　$\boldsymbol{a=1,\ \ 2 \leqq a \leqq 6}$

別解 $a\neq 1$ のとき，2 円の中心間の距離 $\dfrac{a}{2}$ および 2 円の半径 $\dfrac{a}{2}$，$\sqrt{6-a}$ より

$$\left|\frac{a}{2}-\sqrt{6-a}\right| \leqq \frac{a}{2} \leqq \frac{a}{2}+\sqrt{6-a}$$

を解いてもよい．

(a) $\dfrac{a}{2} \geqq \sqrt{6-a}$，すなわち，$a \geqq 2\sqrt{7}-2$ のとき

$$2\sqrt{7}-2 \leqq a \leqq 6$$

(b) $\dfrac{a}{2} \leqq \sqrt{6-a}$，すなわち，$0<a\leqq 2\sqrt{7}-2$ のとき $(a\neq 1)$

$$2 \leqq a \leqq 2\sqrt{7}-2$$

よって，(a)，(b) および $a=1$ のときであるから

$$\boldsymbol{a=1,\ \ 2 \leqq a \leqq 6}$$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $k < a < b < c \leqq k+n$ より，n 個の整数 $k+1,\ k+2,\ \cdots,\ k+n$ から異なる 3 個を選び，小さい順に $a,\ b,\ c$ とすればよいから，選び方の総数は

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_3}\ \ \textbf{(個)}$$

(2) (1) の結論で，$k=n$ とすると

$$(*)\ \ n < a < b < c \leqq 2n$$

このとき，$a+b > (n+1)+(n+2) > 2n \geqq c$ であるから，
$(*)$ を満たす $a,\ b,\ c$ の組の総数は ${}_n\mathrm{C}_3$ 個ある．
$a=n,\ b=n+2,\ c=2n$ とすると，$a+b>c$ および $(**)$ を満たす．

$$(**)\ \ 1 \leqq a < b < c \leqq 2n$$

よって，$(**)$ を満たす $a,\ b\ c$ の組の総数 L について

$$L > {}_n\mathrm{C}_3$$

が成立する．

別解 $1 \leqq a < b < c \leqq 2n$ について，$b=a+j,\ c=b+k$ とおくと

$$c = a+j+k \qquad (j,\ k\ \text{は自然数})$$

$a+b>c$ および $c<2n$ であるから

$$a+(a+j) > a+j+k, \quad a+j+k \leqq 2n$$

すなわち，次を満たす自然数 $a,\ j,\ k$ の組の総数が L である．

$$k<a,\ a+j+k \leqq 2n$$

ここで

$$\begin{aligned}
X &= \{(a,\ j,\ k) \mid k<a,\ a+j+k \leqq 2n\},\\
Y &= \{(a,\ j,\ k) \mid k=a,\ a+j+k \leqq 2n\},\\
Z &= \{(a,\ j,\ k) \mid k>a,\ a+j+k \leqq 2n\}
\end{aligned}$$

とおくと，$L=n(X)=n(Z)$，$n(X)+n(Y)+n(Z)={}_{2n}\mathrm{C}_3$

$n(Y)$ は，$j \leqq 2(n-k)$ を満たす自然数の組の個数であるから

$$n(Y) = \sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k) = 2\sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1)$$

したがって　　$2L + n(n-1) = {}_{2n}\mathrm{C}_3$

$$\begin{aligned} 2L + n(n-1) &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} \\ L &= \frac{1}{6}n(n-1)(4n-5) \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)\{(n-2)+3(n-1)\} \\ &= {}_n\mathrm{C}_3 + \frac{1}{2}n(n-1)^2 > {}_n\mathrm{C}_3 \end{aligned}$$

補足 $n(X)+n(Y)+n(Z)$ の個数は，$2n$ 個の○を $2n$ 個の仕切り（ | ）から 3 個選んで区切られた○の個数を左から順に a，j，k と考える．

$$\bigcirc \mid \bigcirc \mid \bigcirc \mid \bigcirc \mid \cdots\ \bigcirc \mid$$

本題で求めた L は，例えば，$n=3$ のとき　$L=7$

$$\begin{aligned} (a,b,c) = &(2,3,4),(2,4,5),(2,5,6),(3,4,5), \\ &(3,4,6),(3,5,6),(4,5,6) \end{aligned}$$

■