令和６年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

問題 1 2 3 4 5

1 t を実数とし，xy 平面上の点 $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ および $\mathrm{Q}(\sin t,\ \sin 2t)$ を考える．

(1) 点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ．

(2) t が $0 < t < 2\pi$ の範囲で変化するとき，点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ．ただし，x 軸，y 軸との共有点がある場合は，それらの座標を求め，図中に記せ．

2 各面に 1 つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある.「1」,「2」,「3」が書かれた面がそれぞれ 1 つずつあり，残りの 5 つの面には「0」が書かれている．このさいころを水平な床面に投げて，出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える．最初の持ち点は 0 点とし，この試行を繰り返す．例えば，3 回の試行を行ったとき，出た面に書かれた数が「0」,「2」,「3」であれば，持ち点は 5 となる．なお，さいころが水平な床面にあるとき，さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ．また，さいころを投げるとき，各面が出ることは同様に確からしいとする．

(1) この試行を n 回行ったとき，持ち点が 2 以下である確率を求めよ．ただし，n は 2 以上の自然数とする．

(2) この試行を 4 回行って持ち点が 10 以上であったときに，さらにこの試行を 2 回行って持ち点が 17 点以上である条件付き確率を求めよ．

3 次の問いに答えよ．

(1) α を実数とする．次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$\alpha_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2) 関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$\cdots$ を次の関係式で定める．

$$f_1(x) = 3x$$
$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ．

4 三角形 OAB が，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 3$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 5$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 10$ をみたしているとする．三角形 OAB の内接円の中心を I とし，この内接円と辺 OA の接点を H とする．

(1) 辺 OB の長さを求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{HI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

5 関数

$$f(x) = x\log(x+2) + 1 \qquad (x > -2)$$

を考える．$y = f(x)$ で表される曲線を C とする．C の接線のうち傾きが正で原点を通るものを ℓ とする．ただし，$\log t$ は t の自然対数である．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C は下に凸であることを証明せよ．

(3) C と ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 点 $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ と点 $\mathrm{Q}(\sin t,\ \sin 2t)$ が一致するとき

$$\begin{cases} \cos 2t = \sin t \\ \cos t = \sin 2t \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} (\sin t + 1)(2\sin t - 1) = 0 \\ \cos t(2\sin t - 1) = 0 \end{cases}$$

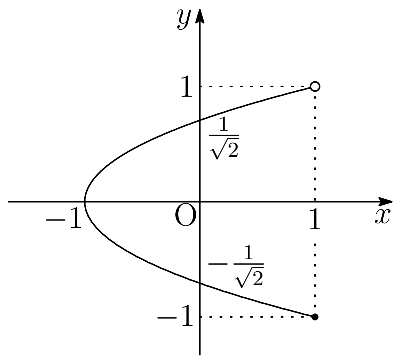
$\sin t + 1 = 0 \implies \cos t = 0$ に注意して　$\sin t = \dfrac{1}{2}, -1$

よって　$\boldsymbol{t = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi,\ \ \dfrac{5}{6}\pi + 2n\pi,\ \ \dfrac{3}{2}\pi + 2n\pi}$

(2) $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ について，$0 < t < 2\pi$ のとき

$$-1 \leqq \cos t < 1, \quad \cos 2t = 2\cos^2 t - 1$$

よって，求める軌跡の方程式は　$x = 2y^2 - 1 \quad (-1 \leqq y < 1)$
したがって，点 P の描く軌跡は，下の図の実線部分で ∘ は含まない．



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $p=\dfrac{1}{8}$, $q=\dfrac{5}{8}$ とおく．

持ち点が 0，すなわち,「0」が n 回出る確率は　q^n

持ち点が 1，すなわち,「1」が 1 回,「0」が $n-1$ 回出る確率は

$$ {}_n\mathrm{C}_1pq^{n-1}=npq^{n-1} $$

持ち点が 2，すなわち,「2」が 1 回,「0」が $n-1$ 回，または,「1」が 2 回,「0」が $n-2$ 回出る確率は

$$ {}_n\mathrm{C}_1pq^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2p^2q^{n-2}=npq^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2} $$

よって，求める確率は

$$ \begin{aligned} &q^n+npq^{n-1}+\left\{npq^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2}\right\} \\ &=\left\{q^2+2npq+\frac{n(n-1)}{2}p^2\right\}q^{n-2} \\ &=\left(\frac{25}{8^2}+\frac{10n}{8^2}+\frac{n^2-n}{2\cdot 8^2}\right)\cdot\frac{5^{n-2}}{8^{n-2}}=\boldsymbol{\frac{(n^2+19n+50)\cdot 5^{n-2}}{2\cdot 8^n}} \end{aligned} $$

(2) 持ち点が 10，すなわち,「1」が 1 回,「3」が 3 回，または,「2」が 2 回,「3」が 2 回出る確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_1p\cdot p^3+{}_4\mathrm{C}_2p^2\cdot p^2=10p^4 $$

持ち点が 11，すなわち,「2」が 1 回,「3」が 3 回出る確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_1p\cdot p^3=4p^4 $$

持ち点が 12，すなわち,「3」が 4 回出る確率は　p^4

以上から，試行を 4 回行って得点が 10 以上になる確率は

$$ 10p^4+4p^4+p^4=15p^4 $$

試行を 4 回行って持ち点が 10 以上で，さらにこの試行を 2 回行って持ち点が 17 以上となるのは，次の場合である．

(i) 4 回行って持ち点が 11 で，さらに「3」が 2 回出る確率は

$$ 4p^4\times p^2=4p^6 $$

(ii) 4 回行って持ち点が 12 で，さらに「2」が 1 回,「3」が 1 回，または「3」が 2 回出る確率は

$$ p^4\times({}_2\mathrm{C}_1p\cdot p+p^2)=3p^6 $$

求める条件付き確率は　$\dfrac{4p^6+3p^6}{15p^4}=\dfrac{7}{15}p^2=\dfrac{7}{15}\left(\dfrac{1}{8}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{7}{960}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a_1=\alpha$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$ より $\qquad a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$

$\{a_n-2\}$ は初項 $a_1-2=\alpha-2$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n-2=(\alpha-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a_n=2+\frac{\alpha-2}{2^{n-1}}}$$

(2) $a_n=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ とおくと，$f_1(x)=3x$ より

$$a_1=\int_0^1 3t\,dt=\left[\,\frac{3}{2}t^2\,\right]_0^1=\frac{3}{2}$$

$f_{n+1}(x)=(n+2)x^{n+1}+\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x$ より $(n=1,2,3,\cdots)$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt&=\int_0^1(n+2)t^{n+1}\,dt+a_n\int_0^1 t\,dt\\ a_{n+1}&=\left[\,t^{n+2}\,\right]_0^1+\frac{1}{2}a_n\left[\,t^2\,\right]_0^1\\ &=\frac{1}{2}a_n+1\end{aligned}$$

したがって，(1) の結果に $\alpha=\dfrac{3}{2}$ を代入すると

$$a_n=2-\frac{1}{2^n}$$

$n\geqq 1$ のとき $\quad f_{n+1}(x)=(n+2)x^{n+1}+\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)x$

上式に $n=0$ を代入すると $f_1(x)=3x$ となるから，次式が成立する．

$$\boldsymbol{f_n(x)=(n+1)x^n+\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)x\quad (n=1,2,3,\cdots)}$$

■

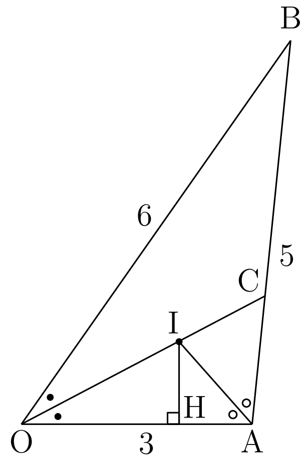
4 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=10$ を上式に代入すると

$$5^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\cdot10+3^2 \quad ゆえに \quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=36$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|>0$ であるから $\quad \boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=6}$

(2) $\angle$O の二等分線 OI と AB の交点を C とすると



$$\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=3:6=1:2$$

ゆえに $\quad \mathrm{AC}=\mathrm{AB}\times\dfrac{1}{1+2}=5\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$

AI は $\angle$A の二等分線であるから

$$\mathrm{OI}:\mathrm{IC}=\mathrm{OA}:\mathrm{AC}=3:\frac{5}{3}=9:5$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{9}{9+5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{9}{14}\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{6\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{14}}$$

(3) (2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{6|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{14}=\frac{6\cdot3^2+3\cdot10}{14}=6$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{6}{3^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{HI}}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{6\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{14}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{-10\overrightarrow{\mathrm{OA}}+9\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{42}}$$

補足 $\triangle$OAB の内接円の辺 AB との接点を J とし，$x=\mathrm{OH}$ とすると

$$\mathrm{HA}=\mathrm{AJ}=3-x,\quad \mathrm{JB}=5-(3-x)=x+2$$

したがって $\quad \mathrm{OB}=x+(x+2)=2x+2$

$\mathrm{OB}=6$ より $\quad 2x+2=6 \quad$ ゆえに $\quad \mathrm{OH}=2$ ■

$\boxed{5}$ (1) $f(x)=x\log(x+2)+1$ を微分すると　$f'(x)=\log(x+2)+\dfrac{x}{x+2}$

C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)\quad ゆえに\quad y=f'(t)x+f(t)-tf'(t)$$

この直線が原点を通るとき，$f(t)-tf'(t)=0$ より

$$t\log(t+2)+1-t\left\{\log(t+2)+\frac{t}{t+2}\right\}=0$$

整理すると　　$t^2-t-2=0$　ゆえに　$(t+1)(t-2)=0$

これを解いて　$t=-1,\ 2$

このとき　$f'(-1)=-1<0,\quad f'(2)=2\log 2+\dfrac{1}{2}>0$

よって，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{y=\left(2\log 2+\dfrac{1}{2}\right)x}$

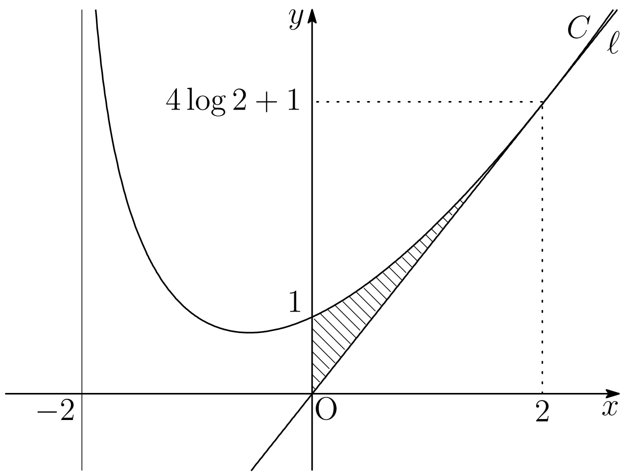
(2) $f'(x)=\log(x+2)+1-\dfrac{2}{x+2}$ を微分すると $(x>-2)$

$$f''(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}>0$$

したがって，C は下に凸である．

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_0^2\{x\log(x+2)+1\}\,dx-\frac{1}{2}\cdot2\cdot(4\log 2+1)\\&=\frac{1}{2}\int_0^2(x^2-4)'\log(x+2)\,dx+\Big[\,x\,\Big]_0^2-(4\log 2+1)\\&=\frac{1}{2}\Big[\,(x^2-4)\log(x+2)\,\Big]_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2(x-2)\,dx+1-4\log 2\\&=2\log 2-\frac{1}{4}\Big[\,(x-2)^2\,\Big]_0^2+1-4\log 2=\mathbf{2-2\log 2}\end{aligned}$$



別解 (ガウス・グリーンの定理の系)

$$
\begin{aligned}
xf'(x) - f(x) &= x\left\{\log(x+2) + \frac{x}{x+2}\right\} - \{x\log(x+2) + 1\} \\
&= \frac{x^2}{x+2} - 1 = x - 3 + \frac{4}{x+2}
\end{aligned}
$$

求める面積 S は (積分区間は動径の偏角が正の向きになるようにとる)

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_2^0 (xy' - y)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_2^0 \left(x - 3 + \frac{4}{x+2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\,\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\log(x+2)\,\right]_2^0 \\
&= \mathbf{2 - 2\log 2}
\end{aligned}
$$

補足 別解の公式は，ガウス・グリーンの定理

$$
S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\}\,dt
$$

の変数 t を x に変更したものである． ■