令和５年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

問題 1 2 3 4 5

1 複素数平面上における図形 C_1，C_2，$\cdots$，C_n，$\cdots$ は次の条件 (A) と (B) をみたすとする．ただし，i は虚数単位とする．

(A) C_1 は原点 O を中心とする半径 2 の円である．

(B) 自然数 n に対して，z が C_n 上を動くとき $2w = z + 1 + i$ で定まる w の描く図形が C_{n+1} である．

(1) すべての自然数 n に対して，C_n は円であることを示し，その中心を表す複素数 α_n と半径 r_n を求めよ．

(2) C_n 上の点と O との距離の最小値を d_n とする．このとき，d_n を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_n$ を求めよ．

2 O を原点とする座標空間において，3 点 A$(4,\ 2,\ 1)$，B$(1, -4,\ 1)$，C$(2,\ 2, -1)$ を通る平面を α とおく．また，球面 S は半径が 9 で，S と α の交わりは A を中心とし B を通る円であるとする．ただし，S の中心 P の z 座標は正とする．

(1) 線分 AP の長さを求めよ．

(2) P の座標を求めよ．

(3) S と直線 OC は 2 点で交わる．その 2 点間の距離を求めよ．

3 以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底を表す．

(1) k を実数の定数とし，$f(x) = xe^{-x}$ とおく．方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ を用いてもよい．

(2) $xye^{-(x+y)} = c$ をみたす正の実数 x，y の組がただ 1 つ存在するときの実数 c の値を求めよ．

(3) $xye^{-(x+y)} = \dfrac{3}{e^4}$ をみたす正の実数 x，y を考えるとき，y のとりうる値の最大値とそのときの x の値を求めよ．

$\boxed{4}$ n を 2 以上の自然数とする．1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に a_1，a_2，$\cdots$，a_n とし，

$$K_n = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \cdots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6|$$

とおく．また，K_n のとりうる値の最小値を q_n とする．

(1) $K_3 = 5$ となる確率を求めよ．

(2) q_n を求めよ．また，$K_n = q_n$ となるための a_1，a_2，$\cdots$，a_n に関する必要十分条件を求めよ．

(3) n を 4 以上の自然数とする．$L_n = K_n + |a_4 - 4|$ とおき，L_n のとりうる値の最小値を r_n とする．$L_n = r_n$ となる確率 p_n を求めよ．

$\boxed{5}$ a，b を $a^2 + b^2 < 1$ をみたす正の実数とする．また，座標平面上で原点を中心とする半径 1 の円を C とし，C の内部にある 2 点 A$(a,\ 0)$，B$(0,\ b)$ を考える．$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に対して C 上の点 P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を考え，P における C の接線に関して B と対称な点を D とおく．

(1) $f(\theta) = ab\cos 2\theta + a\sin\theta - b\cos\theta$ とおく．方程式 $f(\theta) = 0$ の解が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つ存在することを示せ．

(2) D の座標を b，θ を用いて表せ．

(3) θ が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，3 点 A，P，D が同一直線上にあるような θ は少なくとも 1 つ存在することを示せ．また，このような θ はただ 1 つであることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $2w = z + 1 + i$ より　$w - 1 - i = \dfrac{1}{2}(z - 1 - i)$

C_n の点 z_n は上の変換によって，C_{n+1} の点 z_{n+1} は次式で導かれる．

$$z_{n+1} - 1 - i = \frac{1}{2}(z_n - 1 - i)$$

したがって　$z_n - 1 - i = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(z_1 - 1 - i)$

$$z_n - (1 - 2^{1-n})(1 + i) = 2^{1-n} z_1$$

$|z_1| = 2$ であるから　$|z_n - (1 - 2^{1-n})(1 + i)| = 2^{2-n}$

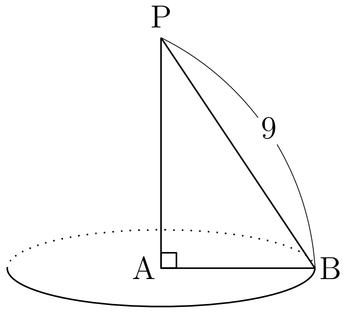
よって　$\boldsymbol{\alpha_n = (1 - 2^{1-n})(1 + i),\ \ r_n = 2^{2-n}}$

(2) $|\alpha_n| = (1 - 2^{1-n})|1 + i| = (1 - 2^{1-n})\sqrt{2}$，$r_n = 2^{2-n}$ より

$$\begin{aligned} d_n &= \big||\alpha_n| - r_n\big| = |(1 - 2^{1-n})\sqrt{2} - 2^{2-n}| \\ &= |\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})2^{1-n}| \\ &= \begin{cases} \boldsymbol{(2 + \sqrt{2})2^{1-n} - \sqrt{2}} & \boldsymbol{(n = 1, 2)} \\ \boldsymbol{\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})2^{1-n}} & \boldsymbol{(n \geqq 3)} \end{cases} \end{aligned}$$

よって　$\displaystyle \boldsymbol{\lim_{n \to \infty} d_n = \sqrt{2}}$　■

2 (1) A(4, 2, 1)，B(1, −4, 1) より



$$\mathrm{AB}^2 = (1-4)^2 + (-4-2)^2 + (1-1)^2$$
$$= 45$$

したがって

$$\mathrm{AP} = \sqrt{\mathrm{PB}^2 - \mathrm{AB}^2} = \sqrt{81-45} = \mathbf{6}$$

(2) A(4, 2, 1)，B(1, −4, 1)，C(2, 2, −1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-3, -6,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-2,\ 0, -2)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

とすると，AP が平面 α に垂直で，AP = 6 であるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \pm 6\vec{n} = (4,\ 2,\ 1) \pm 6\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$
$$= (4 \pm 4,\ 2 \mp 2,\ 1 \mp 4)$$

P の z 座標が正であるから　　**P(0, 4, 5)**

(3) 点 P から直線 OC に垂線 PH を引くと

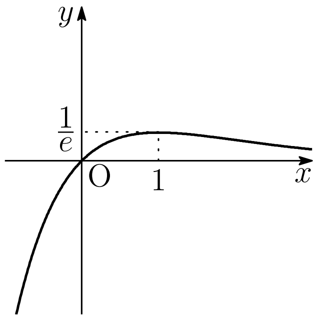
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{3}{9}(2,\ 2, -1) = \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{HP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} = (0,\ 4,\ 5) - \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}(-1,\ 5,\ 8)$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{HP}}| = \frac{2}{3}\sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 8^2} = 2\sqrt{10}$$

よって，求める 2 点間の距離は　$2\sqrt{9^2 - |\overrightarrow{\mathrm{HP}}|^2} = \mathbf{2\sqrt{41}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=xe^{-x}$ より　$f'(x)=(1-x)e^{-x}$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $\frac{1}{e}$	$\searrow$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=0$$



$f(x)=k$ の異なる実数解の個数は，曲線 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数である．

よって $\begin{cases} \boldsymbol{k \leqq 0,\ k=\frac{1}{e}} \textbf{のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{0<k<\frac{1}{e}} \textbf{のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{k>\frac{1}{e}} \textbf{のとき} & \textbf{0 個} \end{cases}$

(2) $(*)$ $xye^{-(x+y)}=c$ をみたす正の実数 x，y の組が $(x,\ y)=(a,\ b)$ とすると $(a\neq b)$，$(x,\ y)=(b,\ a)$ も $(*)$ を満たすので，条件に反する．したがって，$(*)$ をみたす x，y がただ 1 つであるとき，$x=y$ であるから

$$x^2e^{-2x}=f(x)^2=c\quad(c>0)$$

このとき，$x>0$ であるから，$f(x)>0$ より　$f(x)=\sqrt{c}$

(1) の結果から　$\sqrt{c}=\dfrac{1}{e}$　よって　$\boldsymbol{c=\dfrac{1}{e^2}}$

(3) $xye^{-(x+y)}=\dfrac{3}{e^4}$ より

$$f(x)f(y)=f(1)f(3)\quad ゆえに\quad f(y)=\frac{f(1)f(3)}{f(x)}$$

(1) で求めたグラフから y が最大となるとき，$f(y)$ は最小値をとる．上式から，$f(y)$ が最小となるとき，$f(x)$ は最大値をとるから

$$\boldsymbol{x=1}\quad ゆえに\quad f(y)=f(3)\quad よって\quad \boldsymbol{y=3}$$

■

4 $K_n=|1-a_1|+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n-6|$ より

$$\begin{aligned}K_n&=|a_1-1|+|a_2-a_1|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|+|6-a_n|\\&\geqq|(a_1-1)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+(6-a_n)|=5\end{aligned}\qquad(*)$$

したがって　$q_n=5\cdots$①

$a_1-1\geqq0,\ 6-a_n\geqq0$ より，$(*)$ において等号が成立するとき，

$$a_2-a_1\geqq0,\ \cdots,\ a_n-a_{n-1}\geqq0$$

すなわち　$1\leqq a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_{n-1}\leqq a_n\leqq6$　(A)

$a_1-1,\ a_2-a_1,\ \cdots,\ a_n-a_{n-1},\ 6-a_n$ の $n+1$ 個から 5 個取る重複組合せは

$${}_{n+1}\mathrm{H}_5={}_{(n+1)+5-1}\mathrm{C}_5={}_{n+5}\mathrm{C}_5$$

$K_n=5$ となる確率 $P(K_n=5)$ は

$$P(K_n=5)=\frac{{}_6\mathrm{H}_n}{6^n}=\frac{{}_{6+n-1}\mathrm{H}_n}{6^n}=\frac{{}_{n+5}\mathrm{C}_5}{6^n}\qquad(**)$$

(1) $(**)$ に $n=3$ を代入して

$$P(K_3=5)=\frac{{}_8\mathrm{C}_5}{6^3}=\boldsymbol{\frac{7}{27}}$$

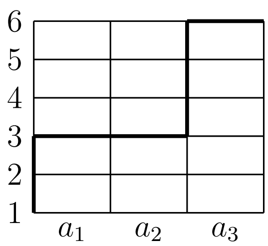
補足 $a_1-1,\ a_2-a_1,\ a_3-a_2,\ 6-a_3$ の 4 個から 5 個取る重複組合せは[1]

$${}_4\mathrm{H}_5={}_{4+5-1}\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_5=56$$

例えば，a_1-1 を 2 個，a_3-a_2 を 3 個取るとき

$$a_1-1=2,\quad a_2-a_1=0,\quad a_3-a_2=3,\quad 6-a_3=0$$

このとき　$a_1=a_2=3,\ a_3=6$



[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Kdai/Kdai_ri_2022.pdf 2 は関連問題．

(2) ① より　$\boldsymbol{q_n = 5}$

(A) より，求める必要十分条件は

$$\boldsymbol{1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n \leqq 6}$$

(3) $a_4 = 4$ および (A) を満たす確率を求めればよい．

$a_1 - 1,\ a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,\ 4 - a_3$ の 4 個から 3 個とる重複組合せは

$$_4\mathrm{H}_3 = {}_6\mathrm{C}_3$$

$n > 4$ のとき，$a_5 - 4,\ a_6 - a_5,\ \cdots,\ a_n - a_{n-1},\ 6 - a_n$ の $n-3$ 個から 2 個とる重複組合せは

$$_{n-3}\mathrm{H}_2 = {}_{n-2}\mathrm{C}_2$$

このとき

$$p_n = \frac{{}_6\mathrm{C}_3 \cdot {}_{n-2}\mathrm{C}_2}{6^n}$$

上式は，$n = 4$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{p_n = \frac{10(n-2)(n-3)}{6^n}}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $a,\ b$ は，$a^2+b^2<1$ をみたす正の実数であるから

$$0<a<1,\quad 0<b<1$$

これから　$f(0)=b(a-1)<0,\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a(1-b)>0$

したがって，中間値の定理により，$f(\theta)=0$ の解が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つ存在する．

(2) $C: x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ における接線の方程式は

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1 \quad \cdots ①$$

点 $\mathrm{B}(0,\ b)$ を通り，直線 ① に垂直な直線の方程式は

$$x\sin\theta-y\cos\theta=-b\cos\theta \quad \cdots ②$$

2 直線 ①，② の交点を M とすると，その座標は

$$\mathrm{M}(-b\sin\theta\cos\theta+\cos\theta,\ b\cos^2\theta+\sin\theta)$$

(3) M は 2 点 B，D の中点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=2(-b\sin\theta\cos\theta+\cos\theta,\ b\cos^2\theta+\sin\theta)-(0,\ b)\\&=(-b\sin2\theta+2\cos\theta,\ b\cos2\theta+2\sin\theta)\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{D}(-b\sin2\theta+2\cos\theta,\ b\cos2\theta+2\sin\theta)}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\cos\theta-a,\ \sin\theta)/\!/\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-b\sin2\theta+2\cos\theta-a,\ b\cos2\theta+2\sin\theta)$ より

$$-(\cos\theta-a)(b\cos2\theta+2\sin\theta)+\sin\theta(-b\sin2\theta+2\cos\theta-a)=0$$

整理すると　　$ab\cos2\theta+a\sin\theta-b(\cos2\theta\cos\theta+\sin2\theta\sin\theta)=0$

また，$\cos2\theta\cos\theta+\sin2\theta\sin\theta=\cos\theta$ であるから

$$ab\cos2\theta+a\sin\theta-b\cos\theta=0 \quad \text{すなわち} \quad f(\theta)=0$$

(1) の結果から，上式をみたす $\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ が少なくとも 1 つ存在する．

$f(\theta)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -2ab\sin 2\theta + a\cos\theta + b\sin\theta \\ &= -4ab\sin\theta\cos\theta + a\cos\theta + b\sin\theta \end{aligned}$$

$x = a\cos\theta$，$y = b\sin\theta$ とおくと $\left(a > 0,\ b > 0,\ a^2+b^2 < 1,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$xy = ab\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}ab\sin 2\theta = \frac{1}{4}\{a^2+b^2-(a-b)^2\}\sin 2\theta < \frac{1}{4}$$

したがって

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -4xy + x + y = -4xy + (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + 2\sqrt{xy} \\ &= 2\sqrt{xy}(1-2\sqrt{xy}) + (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 > 0 \end{aligned}$$

$f(\theta)$ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において，単調増加であるから，

$$f(\theta) = 0$$

をみたす θ はただ 1 つである． ■