# 令和４年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
## 理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたす $a$，$b$ に対し，関数

$$f(x) = |x(x-1)| + |(x-a)(x-b)|$$

を考える．$x$ が実数の範囲を動くとき，$f(x)$ は最小値 $m$ をもつとする．

(1) $x < 0$ および $x > 1$ では $f(x) > m$ となることを示せ．

(2) $m = f(0)$ または $m = f(1)$ であることを示せ．

(3) $a$，$b$ が $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたして動くとき，$m$ の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a$ は $a \neq 1$ をみたす正の実数とする．$xy$ 平面上の点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n, \cdots$ および $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \cdots, \mathrm{Q}_n, \cdots$ が，すべての自然数 $n$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = (1-a)\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}} = \left(0,\ \frac{a^{-n}}{1-a}\right)$$

をみたしているとする．また，$\mathrm{P}_n$ の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする．

(1) $x_{n+2}$ を $a$，$x_n$，$x_{n+1}$ で表せ．

(2) $x_1 = 0$，$x_2 = 1$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $y_1 = \dfrac{a}{(1-a)^2}$，$y_2 - y_1 = 1$ のとき，数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 連立不等式 $x \geqq 2$，$2^x \leqq x^y \leqq x^2$ の表す領域を $xy$ 平面上に図示せよ．ただし，自然対数の底 $e$ が $2 < e < 3$ をみたすことを用いてよい．

(2) $a > 0$ に対して，連立不等式 $2 \leqq x \leqq 6$，$(x^y - 2^x)(x^a - x^y) \geqq 0$ の表す $xy$ 平面上の領域の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ を最小にする $a$ の値を求めよ．

**4** アルファベットの A と書かれた玉が 1 個，D と書かれた玉が 1 個，H と書かれた玉が 1 個，I と書かれた玉が 1 個，K と書かれた玉が 2 個，O と書かれた玉が 2 個ある．これら 8 個の玉を円形に並べる．

(1) 時計回りに HOKKAIDO と並ぶ確率を求めよ．

(2) 隣り合う子音が存在する確率を求めよ．ここで子音とは，D，H，K の 3 文字 (玉は 4 個) のことである．

(3) 隣り合う子音が存在するとき，それが KK だけである条件つき確率を求めよ．

**5** 複素数 $z$ に関する次の 2 つの方程式を考える．ただし，$\overline{z}$ を $z$ と共役な複素数とし，$i$ を虚数単位とする．

$$z\overline{z} = 4 \quad \cdots ① \qquad\qquad |z| = |z - \sqrt{3} + i| \quad \cdots ②$$

(1) ①，② のそれぞれの方程式について，その解 $z$ 全体が表す図形を複素数平面上に図示せよ．

(2) ①，② の共通解となる複素数をすべて求めよ．

(3) (2) で求めたすべての複素数の積を $w$ とおく．このとき，$w^n$ が負の実数となるための整数 $n$ の必要十分条件を求めよ．

解答例

**1** (1) $x<0,\ 1<x$ のとき

$$\begin{aligned}f(x)&=x(x-1)+(x-a)(x-b)=2x^2-(a+b+1)x+ab\\&=2\left(x-\frac{a+b+1}{4}\right)^2+f\left(\frac{a+b+1}{4}\right)\end{aligned}$$

$0\leqq a\leqq b\leqq 1$ より $\dfrac{1}{4}\leqq\dfrac{a+b+1}{4}\leqq\dfrac{3}{4}$ であるから

$$\begin{aligned}&x<0 \text{ では } f(x)>f(0)\geqq m,\\&1<x \text{ では } f(x)>f(1)\geqq m\end{aligned}$$

(2)

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-(a+b+1)x+ab & (x\leqq 0,\ 1\leqq x)\\(1-a-b)x+ab & (0\leqq x\leqq a,\ b\leqq x\leqq 1)\\-2x^2+(a+b+1)x-ab & (a\leqq x\leqq b)\end{cases}$$

(1) の結果から，最小値は $0\leqq x\leqq 1$ の区間でとる．関数の増減から

$$m=\min\{f(0),\ f(a),\ f(b),\ f(1)\}$$

である．これらの値は

$$\begin{aligned}&f(0)=ab, && f(a)=a(1-a),\\&f(b)=b(1-b), && f(1)=(1-a)(1-b)\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}&f(a)-f(0)=a(1-a-b), && f(b)-f(0)=b(1-a-b),\\&f(a)-f(1)=(1-a)(a+b-1), && f(b)-f(1)=(1-b)(a+b-1)\end{aligned}$$

(i) $a+b-1\geqq 0$ のとき

$$f(0)\geqq f(a)\geqq f(1),\quad f(0)\geqq f(b)\geqq f(1)\quad \text{ゆえに}\quad m=f(1)$$

(ii) $a+b-1\leqq 0$ のとき

$$f(1)\geqq f(a)\geqq f(0),\quad f(1)\geqq f(b)\geqq f(0)\quad \text{ゆえに}\quad m=f(0)$$

(i)，(ii) より　　$m=f(0)$ または $m=f(1)$

(3) (2) の結果から

(i) $a+b-1 \geqq 0$ のとき $(1-b \leqq a)$

$$m = f(1) = (1-a)(1-b) \leqq (1-a)a = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

したがって，$m \leqq \dfrac{1}{4}$ が成立し，等号が成立するとき

$$1-b = a,\ a = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad a = b = \frac{1}{2}$$

(ii) $a+b-1 \leqq 0$ のとき $(a \leqq 1-b)$

$$m = f(0) = ab \leqq (1-b)b = -\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

したがって，$m \leqq \dfrac{1}{4}$ が成立し，等号が成立するとき

$$a = 1-b,\ b = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad a = b = \frac{1}{2}$$

(i)，(ii) より　$a = b = \dfrac{1}{2}$ のとき，$m$ は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ をとる． ■

**2** (1) $\vec{p}_n = \overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$，$\vec{q}_n = \overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ とおくと，与えられた漸化式から

$$\vec{p}_{n+1} - \vec{p}_n = (1-a)(\vec{q}_n - \vec{p}_n), \qquad \vec{q}_{n+1} - \vec{q}_n = \left(0,\ \frac{a^{-n}}{1-a}\right) \qquad (*)$$

$(*)$ の第 1 式から

$$\vec{p}_{n+1} - a\vec{p}_n = (1-a)\vec{q}_n, \quad \vec{p}_{n+2} - a\vec{p}_{n+1} = (1-a)\vec{q}_{n+1}$$

上の第 2 式から第 1 式の辺々の差をとると

$$\vec{p}_{n+2} - (a+1)\vec{p}_{n+1} + a\vec{p}_n = (1-a)(\vec{q}_{n+1} - \vec{q}_n) = (0,\ a^{-n})$$

$\vec{p}_n = (x_n,\ y_n)$ であるから

$$(x_{n+2},\ y_{n+2}) - (a+1)(x_{n+1},\ y_{n+1}) + a(x_n,\ y_n) = (0,\ a^{-n}) \qquad (**)$$

$(**)$ の $x$ 成分から

$$x_{n+2} - (a+1)x_{n+1} + ax_n = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x_{n+2} = (a+1)x_{n+1} - ax_n}$$

(2) (1) の結果から

$$x_{n+2}-x_{n+1}=a(x_{n+1}-x_n),\quad x_{n+2}-ax_{n+1}=x_{n+1}-ax_n$$

それぞれの式から $(x_1=0,\ x_2=1)$

$$x_{n+1}-x_n=(x_2-x_1)a^{n-1}=a^{n-1},$$
$$x_{n+1}-ax_n=x_2-ax_1=1$$

$a\neq 1$ であるから，上の 2 式から $\boldsymbol{x_n=\dfrac{a^{n-1}-1}{a-1}}$

(3) $(**)$ の $y$ 成分から

$$y_{n+2}-(a+1)y_{n+1}+ay_n=a^{-n}$$

$n\geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\{(y_{k+2}-ay_{k+1})-(y_{k+1}-ay_k)\}=\sum_{k=1}^{n-1}a^{-k}=\frac{a^{-1}(1-a^{-n+1})}{1-a^{-1}}$$
$$y_{n+1}-ay_n-y_2+ay_1=\frac{a}{a-1}+\frac{a^{-n+1}}{1-a}$$

このとき $-y_2+ay_1=-(y_2-y_1)+(a-1)y_1$

$$=-1+(a-1)\cdot\frac{a}{(1-a)^2}=\frac{1}{a-1}\qquad\cdots①$$

したがって $y_{n+1}-ay_n=\dfrac{a^{1-n}}{1-a}\qquad\cdots(\mathrm{A})$

① より，$n=1$ のときも (A) は成立する．これから $\dfrac{y_{n+1}}{a^{n+1}}-\dfrac{y_n}{a^n}=\dfrac{a^{-2n}}{1-a}$

$n\geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{y_{k+1}}{a^{k+1}}-\frac{y_k}{a^k}\right)=\frac{1}{1-a}\sum_{k=1}^{n-1}a^{-2k}$$
$$\frac{y_n}{a^n}-\frac{1}{(1-a)^2}=\frac{1}{1-a}\cdot\frac{a^{-2}(1-a^{-2n+2})}{1-a^{-2}}$$
$$\frac{y_n}{a^n}=\frac{a+a^{-2n+2}}{(1-a)^2(1+a)}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから $\boldsymbol{y_n=\dfrac{a^{n+1}+a^{-n+2}}{(1-a)^2(1+a)}}$ ■

**3** (1) $x \geqq 2,\ \ 2^x \leqq x^y \leqq x^2$ より

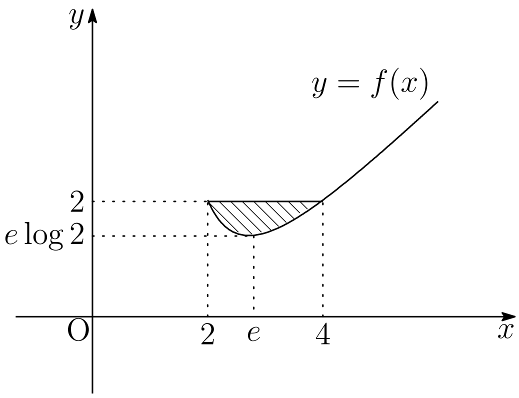
$$x\log 2 \leqq y\log x \leqq 2\log x \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x\log 2}{\log x} \leqq y \leqq 2 \quad (x \geqq 2)$$

$f(x) = \dfrac{x\log 2}{\log x}$ とおくと　$f'(x) = \dfrac{(\log x - 1)\log 2}{(\log x)^2}$

$x \geqq 2,\ y \leqq 2$，$f(2) = f(4) = 2$ であるから．$(x)$ の増減表は

| $x$ | 2 | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | 2 | $\searrow$ | $e\log 2$ | $\nearrow$ | 2 |

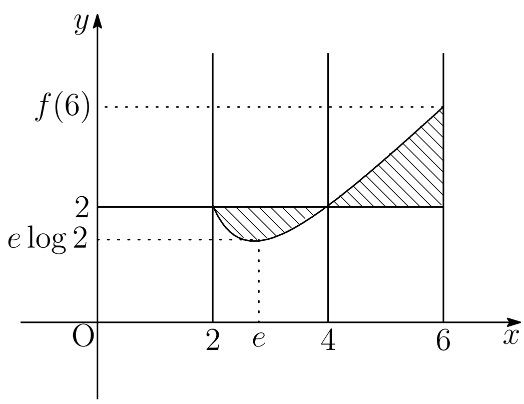
よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．




(2) 連立不等式 $2 \leqq x \leqq 6$，$(x^y - 2^x)(x^a - x^y) \geqq 0$ より

$$\begin{cases} 2 \leqq x \leqq 6 \\ y \geqq f(x) \\ y \leqq a \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} 2 \leqq x \leqq 6 \\ y \leqq f(x) \\ y \geqq a \end{cases}$$

右の図の斜線部分の面積が $a = 2$ のときの面積 $S(2)$ である．



下の図から分かるように

$$\begin{array}{ll} a > f(6) \text{ のとき} & S(a) > S(f(6)), \\ 0 < a < f(e) \text{ のとき} & S(a) > S(f(e)) \end{array}$$

したがって，$S(a)$ の最小値は，$f(e) \leqq a \leqq f(6)$ の値の範囲でとる．
$f(e) \leqq a < 2$ のとき，$a \leqq y \leqq 2$ の部分の面積の大小関係により

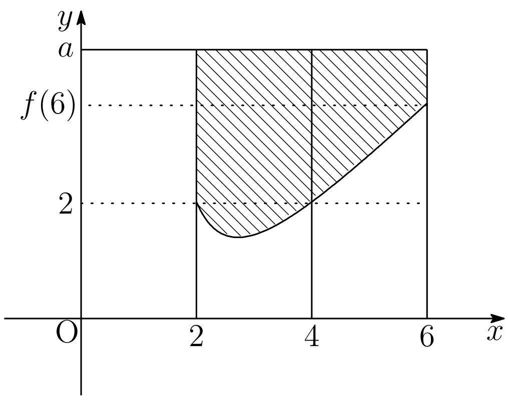
$$S(2) < S(a)$$

$2 \leqq a < f(6)$ のとき，$2 \leqq y \leqq a$ の部分の面積の大小関係により

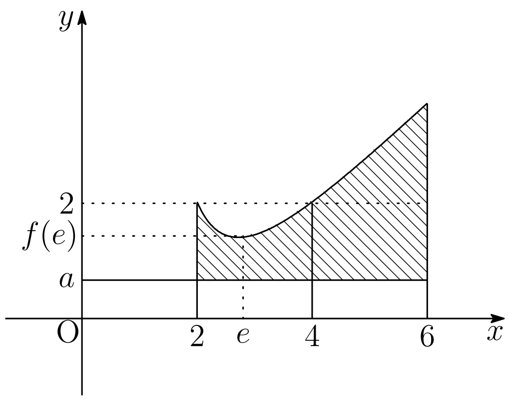
$$S(2) < S(a)$$

よって，$S(a)$ を最小にする $a$ の値は　$\boldsymbol{a = 2}$

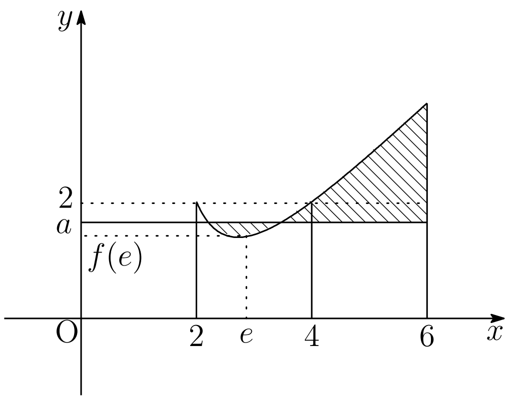
$a > f(6)$



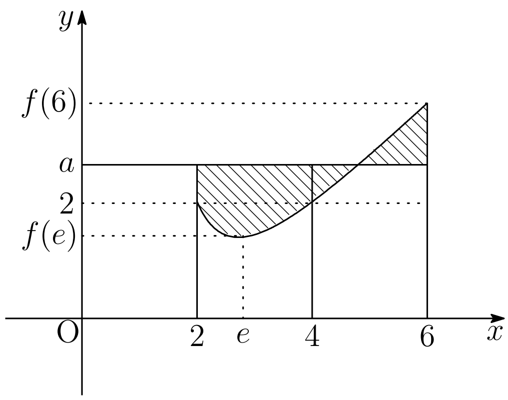

$0 < a < f(e)$




$f(e) \leqq a < 2$




$2 < a \leqq f(6)$



**4** (1) H を基準に他の 7 個を円形に並べる場合の総数は

$$\frac{7!}{2!2!} = 1260 \quad (\text{通り})$$

よって，求める確率は $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1260}}$

(2) 隣り合う子音が存在しない確率を求める．母音と子音がそれぞれ 4 個あり，交互に配置する場合の総数は，H を基準に子音 3 個の並び方 $\dfrac{3!}{2!} = 3$ 通り，母音 4 個の並び方 $\dfrac{4!}{2!} = 12$ 通りあるから，その確率は

$$\frac{3\cdot 12}{1260} = \frac{1}{35}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{1}{35} = \frac{\mathbf{34}}{\mathbf{35}}$$

(3) KK を基準に母音 4 個の並び方は $\dfrac{4!}{2!} = 12$ 通り

残りの子音 2 個の並び方は，下の図の○の 3 カ所の 2 カ所に並べる

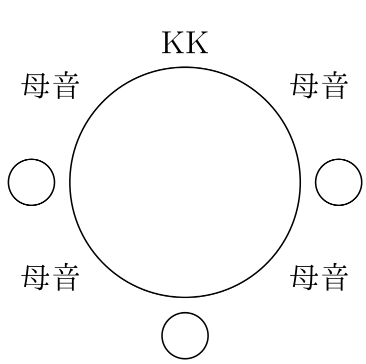
$${}_3\mathrm{P}_2 = 6 \text{ 通り}$$

したがって，隣り合う子音が KK だけである確率は

$$\frac{12\cdot 6}{1260} = \frac{2}{35}$$

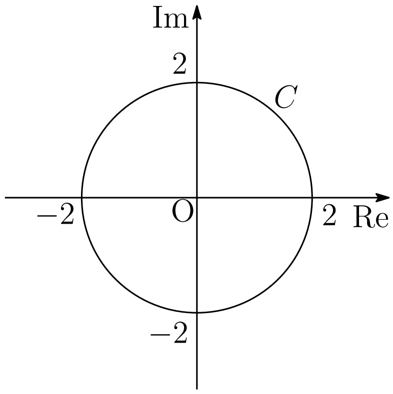
よって，求める条件つき確率は

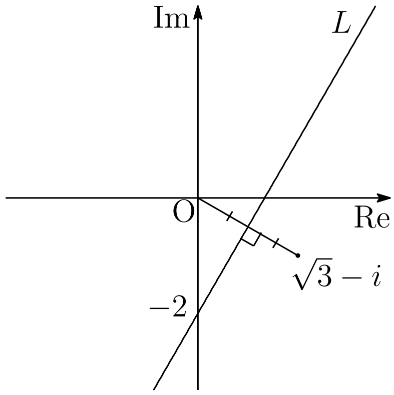
$$\frac{2}{35} \Big/ \frac{34}{35} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{17}}$$




■

**5** (1) ① は原点 O を中心とする半径 2 の円を表す．② は原点 O と点 $\sqrt{3}-i$ を結ぶ線分の垂直二等分線を表す．①，② の図形をそれぞれ $C$，$L$ とすると次のようになる．



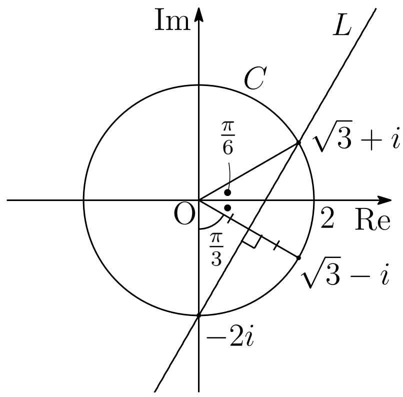

(2) (1) の結果から，$C$ と $L$ の 1 つの交点は

$$-2i$$

点 $\sqrt{3}-i$ の偏角は $-\dfrac{\pi}{6}$ であるから，もう 1 つの交点は

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$$

よって　　$\boldsymbol{-2i,\ \sqrt{3}+i}$




(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} w &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= 4\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} \end{aligned}$$

ゆえに　$\arg w^n = n\arg w = n\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{n\pi}{3}$

$w^n$ が負の実数となるとき

$$-\frac{n\pi}{3}=(2k-1)\pi \quad (k\text{ は整数})$$

をみたせばよい．ゆえに　$n=3-6k$　よって　$\boldsymbol{n\equiv 3 \pmod 6}$ ■