令和３年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

1 三角形 OAB において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D とし，直線 OA に関して点 D と対称な点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とし，$|\vec{a}| = 4$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6$ を満たすとする．

(1) 点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする．$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) 三角形 BDE の面積が $\dfrac{5}{9}$ になるとき，$|\vec{b}|$ の値を求めよ．

2 a を $a \neq -3$ を満たす定数とする．放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線を ℓ_1，点 $\mathrm{B}\left(a+2,\ \dfrac{(a+2)^2}{2}\right)$ における接線を ℓ_2 とする．ℓ_1 と ℓ_2 の交点を C とおく．

(1) C の座標を a を用いて表せ．

(2) a が $a > 0$ を満たしながら動くとき，$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$ が最小となるときの a の値を求めよ．ただし，$|\mathrm{AB}|$ および $|\mathrm{BC}|$ はそれぞれ線分 AB と線分 BC の長さを表す．

3 正の実数 $x,\ y$ が，方程式

$$\frac{9^{4x} + 9^{y^2+1}}{6} = 3^{4x+y^2} \quad \cdots (\bigstar)$$

を満たすとする．

(1) y^2 を x を用いて表せ．

(2) 正の実数 $x,\ y$ が $(\bigstar)$ および $1 - \dfrac{x}{y} > 0$ を満たしながら動くとき，

$$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}} 4} + \frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}} 4}$$

の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $a_1 = 2$，$b_1 = 1$ および

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められた数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある．$c_n = a_n b_n$ とおく．

(1) c_2 を求めよ．

(2) c_n は偶数であることを示せ．

(3) n が偶数のとき，c_n は 28 で割り切れることを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 座標平面上で，媒介変数 θ を用いて

$$x = (1 + \cos\theta)\cos\theta, \quad y = \sin\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

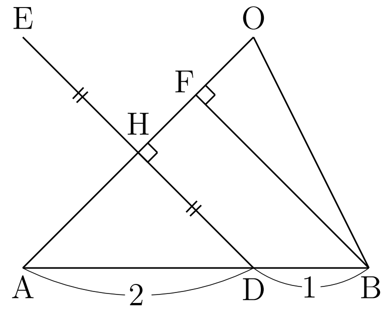
と表される曲線 C がある．C 上の点で x 座標の値が最小になる点を A とし，A の x 座標の値を a とおく．B を点 $(a,\ 0)$，O を原点 $(0,\ 0)$ とする．

(1) a を求めよ．

(2) 線分 AB と線分 OB と C で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \dfrac{6}{4^2}\vec{a} = \boldsymbol{\dfrac{3}{8}\vec{a}}$



(2) 点 D は線分 AB を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$$

点 D から直線 OA に垂線 DH を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a}}{3|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}$$
$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2\cdot 6}{4^2}\right)\vec{a} = \frac{7}{12}\vec{a}$$

H は線分 DE の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\cdot\frac{7}{12}\vec{a} - \frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b}) = \boldsymbol{\frac{5\vec{a}-4\vec{b}}{6}}$$

(3) $\triangle\mathrm{BDE} = \triangle\mathrm{DEF} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{DE}}||\overrightarrow{\mathrm{FH}}| = \dfrac{5}{9}\cdots$① であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{5\vec{a}-4\vec{b}}{6} - \frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{FH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{7}{12}\vec{a} - \frac{3}{8}\vec{a} = \frac{5}{24}\vec{a}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2 = \left|\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}\right|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{4}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{16}{9}|\vec{b}|^2$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 4^2 - \frac{4}{3}\cdot 6 + \frac{16}{9}|\vec{b}|^2 = \frac{16}{9}|\vec{b}|^2 - 4 \quad \cdots②$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{FH}}| = \frac{5}{24}|\vec{a}| = \frac{5}{24}\cdot 4 = \frac{5}{6} \quad \cdots③$$

①, ③ より　$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|\cdot\dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{9}$　ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}| = \dfrac{4}{3}$

これを ② に代入すると　$\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}|\vec{b}|^2 - 4$

したがって　$|\vec{b}|^2 = \dfrac{13}{4}$　よって　$\boldsymbol{|\vec{b}| = \dfrac{\sqrt{13}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ とおくと　$f'(x)=x$

放物線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ f(-1))$，$\mathrm{B}(a+2,\ f(a+2))$ における接線が，それぞれ ℓ_1，ℓ_2 であるから

$$\ell_1 : y-\frac{1}{2}=-(x+1)$$
$$\ell_2 : y-\frac{1}{2}(a+2)^2=(a+2)(x-a-2)$$

すなわち　$\ell_1 : y=-x-\dfrac{1}{2}$　$\ell_2 : y=(a+2)x-\dfrac{1}{2}(a+2)^2$

l_1，ℓ_2 の方程式から y を消去すると　$(a+3)x=\dfrac{1}{2}(a+1)(a+3)$

$a+3\neq 0$ であるから　　$x=\dfrac{1}{2}(a+1)$

これを ℓ_1 の方程式に代入すると　$\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\dfrac{a+1}{2},-\dfrac{a+2}{2}}\right)$

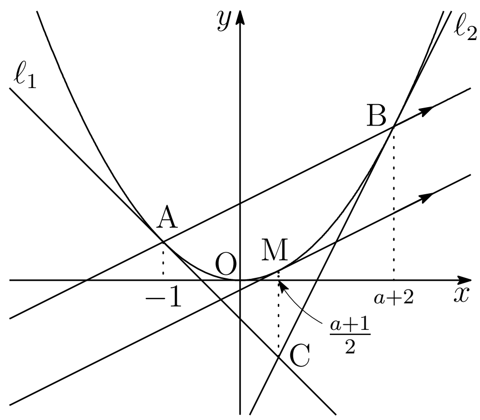
(2) 直線 AB の傾きは

$$\frac{f(a+2)-f(-1)}{(a+2)-(-1)}=\frac{a+1}{2}$$

直線 BC の傾きは

$$f'(a+2)=a+2$$

C の x 座標は A と B の x 座標の中央であるから，$2d=(a+2)-(-1)$ とおくと



$$|\mathrm{AB}|=2d\sqrt{1+\left(\frac{a+1}{2}\right)^2}=d\sqrt{4+(a+1)^2},\quad |\mathrm{BC}|=d\sqrt{1+(a+2)^2}$$

したがって　$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}=\sqrt{\dfrac{4+(a+1)^2}{1+(a+2)^2}}=\sqrt{1-\dfrac{2a}{a^2+4a+5}}$

$a>0$ より　$\dfrac{2a}{a^2+4a+5}=\dfrac{2}{4+a+\frac{5}{a}}\leqq\dfrac{2}{4+2\sqrt{a\cdot\frac{5}{a}}}=\sqrt{5}-2$

$$\frac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}\geqq\sqrt{1-(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

上式で等号が成立するとき　$a=\dfrac{5}{a}$　すなわち　$\boldsymbol{a=\sqrt{5}}$

補足 2次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ について，p を極として展開すると[1]

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+a(x-p)^2$$

$f'(p)=0$ を満たす p をとると

$$f(x)=a(x-p)^2+f(p)$$

このとき，点 $(p,\ f(p))$ は放物線 $y=f(x)$ の頂点である．
また，異なる2つの実数 $\alpha,\ \beta$ を極として $f(x)$ を展開すると

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+a(x-\alpha)^2$$
$$f(x)=f(\beta)+f'(\beta)(x-\beta)+a(x-\beta)^2$$

ここで，2つの1次関数

$$g(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha),\quad h(x)=f(\beta)+f'(\beta)(x-\beta)$$

を考えると

$$f(x)=g(x)+a(x-\alpha)^2,\quad f(x)=h(x)+a(x-\beta)^2 \tag{$*$}$$

2式の辺々の差をとることにより

$$g(x)-h(x)+a(\beta-\alpha)(2x-\alpha-\beta)=0$$

このとき，$y=g(x)$，$y=h(x)$ は，それぞれ $y=f(x)$ 上の2点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ における接線で，これらの交点の x 座標は $(\alpha\neq\beta)$

$$a(\beta-\alpha)(2x-\alpha-\beta)=0 \quad \text{すなわち} \quad x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$m=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ とおくと，$f'(x)=2ax+b$ より

$$f'(m)=a(\alpha+\beta)+b$$

また，直線ABの傾きは

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{a(\beta^2-\alpha^2)+b(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=a(\alpha+\beta)+b$$

直線ABの傾きは，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{M}(m,\ f(m))$ における接線の傾きと等しい．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

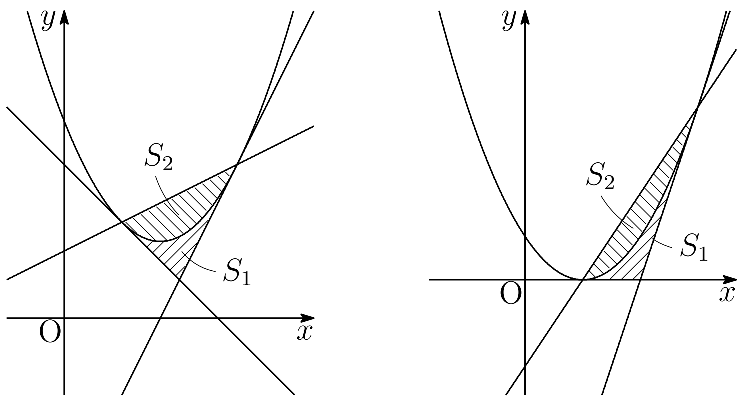
$a>0$ のとき，放物線 $y=f(x)$ とその 2 接線 $y=g(x)$，$y=h(x)$ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると，$(*)$ より

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \{f(x)-g(x)\}\,dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \{f(x)-h(x)\}\,dx \\
&= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} a(x-\alpha)^2\,dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} a(x-\beta)^2\,dx \\
&= \left[\ \frac{a}{3}(x-\alpha)^3\ \right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \left[\ \frac{a}{3}(x-\beta)^3\ \right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \\
&= \frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

また直線 AB と放物線 $y=f(x)$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると，これらの共有点の x 座標が α，β であるから

$$S_2 = -\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

よって　　$S_2 = 2S_1$



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) (★) より　$(3^{4x})^2 - 2\cdot 3^{4x}\cdot 3^{y^2+1} + (3^{y^2+1})^2 = 0$

$$(3^{4x} - 3^{y^2+1})^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 3^{4x} = 3^{y^2+1}$$

したがって　$4x = y^2 + 1$　よって　$\boldsymbol{y^2 = 4x - 1}$

(2) $\dfrac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}} 4} + \dfrac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}} 4} = \log_4\left(1 + \dfrac{x}{y}\right) + \log_4\left(1 - \dfrac{x}{y}\right) = \log_4\left(1 - \dfrac{x^2}{y^2}\right)$

(1) の結果から，$x = \dfrac{y^2+1}{4} \cdots$ ① であるから

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x^2}{y^2} &= 1 - \frac{1}{16y^2}(y^2+1)^2 = \frac{1}{16}\left(14 - y^2 - \frac{1}{y^2}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left\{12 - \left(y - \frac{1}{y}\right)^2\right\} \leqq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

上式で等号が成立するとき，$y > 0$ および ① から　$y = 1,\ x = \dfrac{1}{2}$

このとき $1 - \dfrac{x}{y} > 0$ を満たすから，求める最大値は　$\boldsymbol{\log_4 \dfrac{3}{4}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_1=2$，$b_1=1$ および

$$(*)\quad a_{n+1}=2a_n+3b_n,\quad b_{n+1}=a_n+2b_n\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定められた数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，$c_n=a_nb_n$ であるから

$$a_2=2a_1+3b_1=2\cdot2+3\cdot1=7,\quad b_2=a_1+2b_1=2+2\cdot1=4$$

したがって　　$c_2=a_2b_2=7\cdot4=\mathbf{28}$

(2) a_1，b_1 は整数でるから，漸化式 $(*)$ より，a_n，b_n は整数であるから

$$a_{n+1}=2a_n+3b_n\equiv b_n,\quad b_{n+1}=a_n+2b_n\equiv a_n\pmod 2$$

したがって　$c_{n+1}=a_{n+1}b_{n+1}\equiv b_na_n=c_n\pmod 2$

$c_1=a_1b_1=2\cdot1=2$ であるから，上式より　$c_n\equiv0\pmod 2$

(3) $(*)$ より

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=2a_{n+1}+3b_{n+1}\\&=2(2a_n+3b_n)+3(a_n+2b_n)\\&=7a_n+12b_n,\\b_{n+2}&=a_{n+1}+2b_{n+1}\\&=2a_n+3b_n+2(a_n+2b_n)\\&=4a_n+7b_n\end{aligned}$$

法 4 について　$a_{n+2}\equiv-a_n,\quad b_{n+2}\equiv-b_n\quad\pmod 4$
したがって　$c_{n+2}=a_{n+2}b_{n+2}\equiv a_nb_n=c_n\quad\pmod 4$

法 7 について　$a_{n+2}\equiv5b_n,\quad b_{n+2}\equiv4a_n\quad\pmod 7$
したがって　$c_{n+2}=a_{n+2}b_{n+2}\equiv20a_nb_n\equiv-a_nb_n=-c_n\quad\pmod 7$

$c_2=28$ より　$c_2\equiv0\pmod 4$，$c_2\equiv0\pmod 7$

よって，n が偶数のとき，c_n は 28 で割り切れる．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $x=(1+\cos\theta)\cos\theta$ より　$x=\left(\cos\theta+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

したがって，x の最小値は $-\dfrac{1}{4}$　よって　$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{4}}$

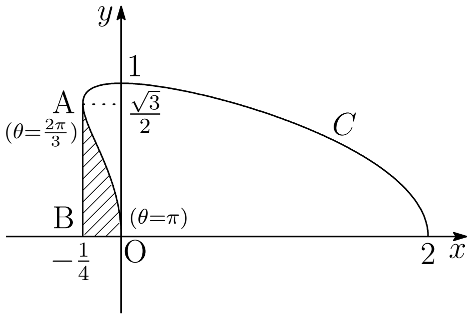
(2) (1) の結果から　$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$　ゆえに　$\mathrm{A}\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$x=(1+\cos\theta)\cos\theta,\ \ y=\sin\theta$ より $(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta),\qquad \frac{dy}{d\theta}=\cos\theta$$
$$=-\sin\theta\,(2\cos\theta+1)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\left(\frac{dx}{d\theta},\frac{dy}{d\theta}\right)$		$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	
(x,y)	$(2,0)$	$\cdots$	$(0,1)$	$\cdots$	$\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\cdots$	$(0,0)$

求める面積は，下の図の斜線部分である．



求める面積を S とすると

$$S=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}y\,dx=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}y\frac{dx}{d\theta}d\theta$$
$$=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\sin\theta(-\sin\theta)\,(2\cos\theta+1)\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left(-2\sin^2\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}\right)d\theta$$
$$=\left[-\frac{2}{3}\sin^3\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta-\frac{\theta}{2}\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6}}$$