令和２年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

1 三角形 ABC について

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 2,\quad |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{6}$$

が成立しているとする．三角形 ABC の外接円の中心を O とし，直線 AO と外接円との A 以外の交点を P とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つような実数 s，t を求めよ．

(3) 直線 AP と直線 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ．

2 座標平面上２点 $\left(\dfrac{1}{16},\ 0\right)$，$\left(0,\ \dfrac{1}{9}\right)$ を通る直線 ℓ を考える．

(1) ℓ 上にある格子点の座標をすべて求めよ．ただし，格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数であるような点のことである．

(2) ℓ 上の格子点のうち，原点との距離が最小となる点を A とする．また，ℓ 上の A 以外の格子点のうち，原点との距離が最小となる点を B とする．さらに，A の x 座標と B の y 座標をそれぞれ x 座標と y 座標とする点を C とする．三角形 ABC の内部および周上にある格子点の個数を求めよ．

3 n を２以上の自然数とする．１個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする．

(1) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ．

(2) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ．

(3) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ α を $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とし，$f(x) = \sin \dfrac{\pi x}{2}$ とする．数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定義されるとき，次の問に答えよ．

(1) すべての自然数 n に対して，$0 < a_n < 1$ かつ $a_{n+1} > a_n$ が成り立つことを示せ．

(2) $b_n = \dfrac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$ とおくとき，すべての自然数 n に対して，$b_{n+1} < b_n$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ および (2) で定めた $\{b_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ a を正の整数とする．微分可能な関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して次の条件を満たしているとする．

$$0 < f(x) < 1, \quad \int_0^x \frac{f'(t)}{\{1 - f(t)\}f(t)}\,dt = ax$$

さらに，$f(0) = \dfrac{1}{3}$ であるとする．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 0$，$x = 1$ で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．さらに，$\displaystyle\lim_{a\to+0} S(a)$ を求めよ．

解答例

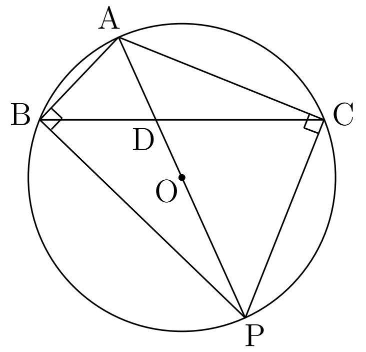
1 (1) $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ の両辺を平方すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{6}$ より

$$4-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+1=6 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\frac{1}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(s-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

AP は △ABC の外接円の直径であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CP}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\{(s-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\}=(s-1)|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=(s-1)\cdot1+t\left(-\frac{1}{2}\right)=s-\frac{1}{2}t-1=0 \quad \cdots①\\\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\{s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(t-1)|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\\&=s\left(-\frac{1}{2}\right)+(t-1)\cdot4=-\frac{1}{2}s+4t-4=0 \quad \cdots②\end{aligned}$$

①，② を解いて　$\boldsymbol{s=\frac{8}{5},\ t=\frac{6}{5}}$

別解 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく．$|\vec{b}|^2\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{b}$ は，$\vec{b}$ と垂直である．

$$|\vec{b}|^2\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{b}=\vec{c}-\left(-\frac{1}{2}\right)\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{b}+2\vec{c})$$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=k(\vec{b}+2\vec{c})$ とおけるから (k は実数)

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(k+1)\vec{b}+2k\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(k+1)\vec{b}+(2k-1)\vec{c}$ は，$\vec{c}$ と垂直であるから

$$(k+1)\vec{b}\cdot\vec{c}+(2k-1)|\vec{c}|^2=-\frac{1}{2}(k+1)+4(2k-1)=0$$

これを解いて　$k=\frac{3}{5}$　よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(3) (2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{14}{5}\cdot\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}$$

D は直線 BC 上の点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}$

$$\begin{aligned}|4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 &= 16|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + 24\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 9|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 \\ &= 16\cdot 1 + 24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 9\cdot 4 = 40\end{aligned}$$

ゆえに　$|4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 2\sqrt{10}$　よって　$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \dfrac{|4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}{7} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{10}}{7}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 直線 ℓ の方程式は　$16x + 9y = 1$　ゆえに　$16(x-4) = -9(y+7)$

16 と 9 は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$\begin{cases} x - 4 = 9k \\ y + 7 = -16k \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x = 9k + 4} \\ \boldsymbol{y = -16k - 7} \end{cases} \quad \textbf{(}\boldsymbol{k}\ \textbf{は整数)}$$

別解 $16 \equiv 7,\ 9 \equiv 0 \pmod 9$ であるから，$16x + 9y = 1$ について

$$7x \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad 4\cdot 7x \equiv 4\cdot 1 \quad \text{すなわち} \quad x \equiv 4 \pmod 9$$

$x = 9k + 4$ とおけるから (k は整数)

$$16(9k+4) + 9y = 1 \quad \text{よって} \quad y = -16k - 7$$

(2) (1) の結果から，ℓ 上の格子点を $\mathrm{P}(9k+4, -16k-7)$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2 &= x^2 + y^2 \\ &= (9k+4)^2 + (-16k-7)^2 \\ &= 337k^2 + 296k + 65 \\ &= 337\left(k + \frac{148}{337}\right)^2 - \frac{148^2}{337} + 65\end{aligned}$$

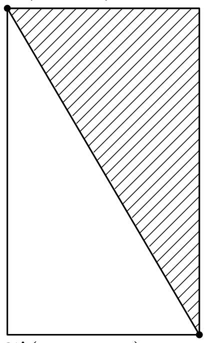
$-\dfrac{1}{2} < -\dfrac{148}{337} < 0$ であるから，原点 O との距離より，$k=0$，$k=-1$ にそれぞれ対応する点が A，B である．

$$\mathrm{A}(4,-7),\quad \mathrm{B}(-5,\ 9)$$

これから　　C(4, 9)

ここで，点 $\mathrm{C}'(-5,-7)$ をとると，四角形 ACBC' の内部と周上にある格子点の個数は

$$\{4-(-5)+1\}\{9-(-7)+1\} = 170\ (\text{個})$$



△ABC の内部と周上ある格子点の個数を n とすると，$\triangle\mathrm{ABC}'$ の内部と周上ある格子点の個数も n である．2 点 A，B はこれら 2 つの領域で共有する点であるから

$$2(n-2)+2 = 170 \quad これを解いて \quad n = \mathbf{86}\ (\text{個})$$

定理 m と n は互いに素である正の整数とするとき，次式が成り立つ[1]．

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\ \frac{km}{n}\ \right] = \frac{1}{2}(m-1)(n-1)$$

ただし，$[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数とする．

別解 求める個数は，$\triangle\mathrm{ABC}'$ の内部と周上ある格子点の個数と等しいから，

$-5 \leqq x \leqq 4$，$\ell : y = \dfrac{-16x+1}{9}$ および直線 $y=-7$ により

$$\begin{aligned}\sum_{x=-5}^{4}\left(\left[\frac{-16x+1}{9}\right] - (-7)+1\right) &= \sum_{x=-5}^{4}\left[\frac{16(4-x)}{9}\right]+10 \\ &= \sum_{k=0}^{9}\left[\frac{16k}{9}\right]+10 = \sum_{k=1}^{8}\left[\frac{16k}{9}\right]+26 \\ &= \frac{1}{2}(16-1)(9-1)+26 = 86\end{aligned}$$

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf (pp.16-17)

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 出る目が $\{3,\ 6\}$ である確率は $\left(\dfrac{2}{6}\right)^n = \dfrac{2^n}{6^n}$

出る目が $\{6\}$ である確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n = \dfrac{1}{6^n}$

3 または 6 である確率からすべて 6 である確率を引けばよいから

$$\frac{2^n}{6^n} - \frac{1}{6^n} = \boldsymbol{\frac{2^n - 1}{6^n}}$$

(2) 最大公約数が偶数である確率は $\left(\dfrac{3}{6}\right)^n = \dfrac{3^n}{6^n}$

最大公約数が 3 である確率は $\dfrac{2^n - 1}{6^n}$

最大公約数が 5 である確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n = \dfrac{1}{6^n}$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1 - \left(\frac{3^n}{6^n} + \frac{2^n - 1}{6^n} + \frac{1}{6^n}\right) = \boldsymbol{\frac{6^n - 3^n - 2^n}{6^n}}$$

(3) 出る目が $\{1, 2, 4, 5\}$ である事象を W，出る目が $\{1, 2, 4, 5\}$ で少なくとも 1 回 4 の目が出る事象を A，出る目が $\{1, 2, 4, 5\}$ で少なくとも 1 回 5 の目が出る事象を B とすると，求める確率は

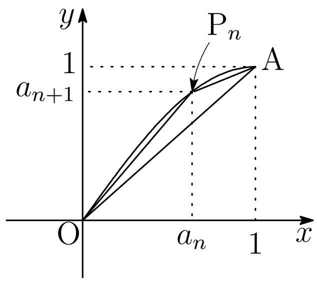
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(W) - P(\overline{A \cap B}) = P(W) - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= P(W) - \{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})\} \\ &= P(W) - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) \end{aligned}$$

$\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A} \cap \overline{B}$ は，それぞれ，出る目が $\{1, 2, 4, 5\}$ のうち，4 が出ない，5 が出ない，4 と 5 が出ない事象であるから

$$P(W) = \left(\frac{4}{6}\right)^n, \quad P(\overline{A}) = P(\overline{B}) = \left(\frac{3}{6}\right)^n, \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{2}{6}\right)^n$$

よって $P(A \cap B) = \left(\dfrac{4}{6}\right)^n - \left(\dfrac{3}{6}\right)^n - \left(\dfrac{3}{6}\right)^n + \left(\dfrac{2}{6}\right)^n = \boldsymbol{\dfrac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n}}$

$\boxed{4}$ (1) 上に凸である曲線 $y = f(x)$ 上に 2 点 A(1, 1), $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_{n+1})$ をとると $(0 < a_n < 1)$, 直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{A}$ の傾きは正で直線 OA の傾き 1 よりも小さいから



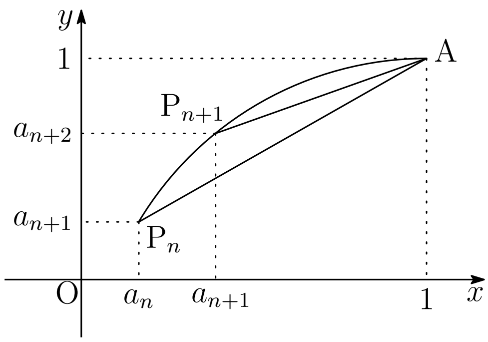
$$0 < \frac{1-a_{n+1}}{1-a_n} < 1$$

したがって　　$a_n < a_{n+1} < 1$

$\{a_n\}$ は単調増加列で, $a_1 = \alpha > 0$ であるから, すべての自然数 n ついて

$$0 < a_n < a_{n+1} < 1$$

(2) (1) の結果より直線 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{A}$ の傾きは直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{A}$ の傾きより小さいから



$$\frac{1-a_{n+2}}{1-a_{n+1}} < \frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}$$

よって　　$b_{n+1} < b_n$

(3) (2) の結果から　$b_n < b_{n-1} < \cdots < b_2 < b_1 < 1 \quad (n > 2)$

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} b_k < \prod_{k=1}^{n-1} b_1$　ゆえに　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-a_{k+1}}{1-a_k} < \prod_{k=1}^{n-1} b_1$　すなわち　$\displaystyle\frac{1-a_n}{1-a_1} < {b_1}^{n-1}$

$\displaystyle 0 < \frac{1-a_n}{1-a_1} < {b_1}^{n-1}$ において, $0 < b_1 < 1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} {b_1}^{n-1} = 0$$

はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-a_n) = 0$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{1}$

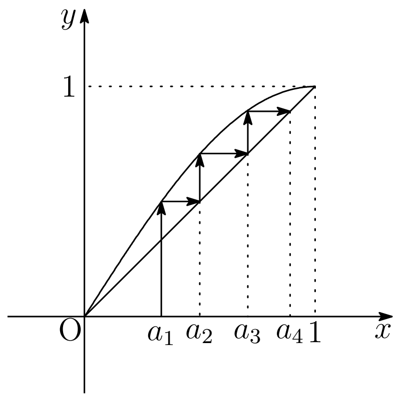
$\displaystyle f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ より, $\displaystyle f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$　ゆえに　$f'(1) = 0$

$\displaystyle b_n = \frac{1-a_{n+1}}{1-a_n} = \frac{f(a_n)-f(1)}{a_n-1}$ および上の諸式から

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-f(1)}{a_n-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = \mathbf{0}$$

解説 上に凸である曲線 $y=f(x)$ および直線 $y=x$ により，数列 $\{a_n\}$ は単調増加列であることが分かる．また，その極限は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$



$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $0<f(x)<1$，$f(0)=\dfrac{1}{3}$，$\displaystyle\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}\,dt = ax$ より

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}\,dt = \int_0^x \left(\frac{f'(t)}{f(t)} - \frac{f'(t)}{f(t)-1}\right)dt = \Big[\ \log\frac{f(t)}{1-f(t)}\ \Big]_0^x$$
$$= \log\frac{f(x)}{1-f(x)} - \log\frac{f(0)}{1-f(0)} = \log\frac{2f(x)}{1-f(x)}$$

したがって $\quad \log\dfrac{2(x)}{1-f(x)} = ax \quad$ ゆえに $\quad \dfrac{2f(x)}{1-f(x)} = e^{ax}$

よって $\qquad \boldsymbol{f(x) = \dfrac{e^{ax}}{e^{ax}+2}}$

(2) (1) の結果から

$$S(a) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+2}$$
$$= \Big[\ \frac{1}{a}\log(e^{ax}+2)\ \Big]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{a}\log\frac{e^a+2}{3}}$$

$g(a)=\log\dfrac{e^a+2}{3}$ とおくと，$g'(a)=\dfrac{e^a}{e^a+2}$，$g(0)=0$，$g'(0)=\dfrac{1}{3}$ により

$$\lim_{a\to 0} S(a) = \lim_{a\to 0}\frac{g(a)-g(0)}{a} = g'(0) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$