平成 31 年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

1 p を負の実数とする．座標空間に原点 O と 3 点 A$(-1,\ 2,\ 0)$，B$(2, -2,\ 1)$，P$(p, -1,\ 2)$ があり，3 点 O，A，B が定める平面を α とする．また，点 P から平面 α に垂線を下ろし，α との交点を Q とする．

(1) 点 Q の座標を p を用いて表せ．

(2) 点 Q が $\triangle$OAB の周または内部にあるような p の範囲を求めよ．

2 n を自然数とし，$a_n = n(n+1)$ とする．さらに，a_n と a_{n+3} の最大公約数を d_n とする．

(1) d_n は偶数であることを示せ．

(2) d_n は 8 で割り切れないことを示せ．

(3) p を 5 以上の素数とするとき，d_n は p で割り切れないことを示せ．

(4) $d_n \leqq 12$ を示せ．また，$d_n = 12$ となるような n を 1 つ求めよ．

3 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．0，$\dfrac{1}{t}$ 以外のすべての実数 x で定義された関数

$$f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える．

(1) $f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつことを示せ．

(2) $f(x)$ の極大値を与える x の値を α，極小値を与える x の値を β とし，座標平面上に 2 点 P$(\alpha,\ f(\alpha))$，Q$(\beta,\ f(\beta))$ をとる．t が $0 < t < 1$ を満たしながら変化するとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ．

4 n を 3 以上の自然数とする．2 つの箱 X と Y があり，どちらの箱にも 1 から n までの n 枚の番号札が入っている．

A と B の 2 人のうち，A は箱 X から札を 1 枚取り出し，取り出した札の番号を得点とする．B は箱 Y から札を 1 枚取り出し，もし取り出した札の番号が 3 から n までのいずれかであればその番号を得点とし，もし取り出した札の番号が 1 または 2 のいずれかであれば，その札を箱 Y に戻し，再び箱 Y から札を 1 枚取り出し，取り出した札の番号を B の得点とする．

(1) m を n 以下の自然数とする．B の得点が m になる確率を求めよ．

(2) A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x)$ を区間 $[0,\ \pi]$ で連続な関数とする．関数 $f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots$ を関係式

$$f_1(x) = f(x),$$
$$f_{n+1}(x) = 2\cos x + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\sin(x-t)\,dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．さらに，自然数 n に対して

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\sin t\,dt, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\cos t\,dt$$

とおく．

(1) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(2) $c_n = a_n - 1$ とおく．このとき，$c_{n+2} = -c_n$ が成立することを示し，一般項 c_n を a_1 と b_1 を用いて表せ．

(3) a_n，b_n が n によらない定数となるような $f(x)$ を 1 つ求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 2,\ 0)$ および $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,-2,\ 1)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=(2,\ 1,-2)$$

とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\vec{n}$ とすると ($\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は実数)

$$\begin{pmatrix} p \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

したがって $\begin{cases} -\alpha+2\beta+2\gamma=p \\ 2\alpha-2\beta+\gamma=-1 \\ \beta-2\gamma=2 \end{cases}$

これを解いて $\alpha=\dfrac{p+2}{3},\quad \beta=\dfrac{4(p+2)}{9},\quad \gamma=\dfrac{2p-5}{9}\quad\cdots(*)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{p+2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\frac{4(p+2)}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{p+2}{9}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

よって $\mathbf{Q}\boldsymbol{\left(\frac{5}{9}(p+2),-\frac{2}{9}(p+2),\ \frac{4}{9}(p+2)\right)}$

(2) $(*)$ より $\alpha+\beta=\dfrac{7(p+2)}{9}$

条件を満たすとき，$\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0,\ \alpha+\beta \leqq 1$ であるから

$$\frac{p+2}{3}\geqq 0,\quad \frac{4(p+2)}{9}\geqq 0,\quad \frac{7(p+2)}{9}\leqq 1$$

これを解いて $\boldsymbol{-2 \leqq p \leqq -\frac{5}{7}}$

補足 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ で表す[1]．

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_n = n(n+1)$，$a_{n+3} = (n+3)(n+4)$ はともに連続する 2 数の積であるから，ともに 2 で割り切れる．よって，d_n は偶数である．

(2) 2 つの整数 a と b の最大公約数を $\gcd(a,\ b)$ と表すことにする．
a_n と a_{n+3} の最大公約数 d_n は，ユークリッドの互除法により

$$\begin{aligned} d_n = \gcd(a_n,\ a_{n+3}) &= \gcd(n^2+n,\ n^2+7n+12) \\ &= \gcd(n(n+1),\ 2{\cdot}3(n+2)) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

d_n が 8 で割り切れると仮定すると，$n+2$ は 4 で割り切れるから

$$n+2 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv -2,\ n+1 \equiv -1 \qquad (\text{mod } 4)$$

$n(n+1) \equiv 2 \ (\text{mod } 4)$ であるから，$(*)$ より，d_n は 8 で割り切れない．

(3) d_n が 5 以上の素数 p で割り切れると仮定すると，同様にして

$$n+2 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv -2,\ n+1 \equiv -1 \qquad (\text{mod } p)$$

$n(n+1) \equiv 2 \ (\text{mod } p)$ であるから，$(*)$ より，d_n は p で割り切れない．

(4) d_n が 9 で割り切れると仮定すると，$n+2$ は 3 で割り切れるから

$$n+2 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv -2,\ n+1 \equiv -1 \qquad (\text{mod } 3)$$

$n(n+1) \equiv 2 \ (\text{mod } 3)$ であるから，$(*)$ より，d_n は 9 で割り切れない．
これと (2)，(3) の結果から　　$d_n \leqq 3{\cdot}4$　　よって　$n \leqq 12$

$d_n = 12$ となるとき，$(*)$ より，$n+2$ が偶数，すなわち，n は偶数であるから，$n = 12$ のとき，$n(n+1)$ は 12 で割り切れる．
よって，$d_n = 12$ を満たす n の一つは　$\boldsymbol{n = 12}$

補足 n は偶数であるから，$n+1$ は奇数である．$n(n+1)$ が 12 で割り切れるとき，n は 4 の倍数であるから，$n = 4k$ とおくと (k は自然数)

$$n(n+1) = 4k(4k+1)$$

このとき　$4k \equiv 0$　または　$4k+1 \equiv 0$　$(\text{mod } 3)$
すなわち　$k \equiv 0$　または　$k+1 \equiv 0$　$(\text{mod } 3)$
一般に　　$n = 4k$　$(k \equiv 0, 2 \ \text{ mod } 3)$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\dfrac{x+t}{x(1-tx)}$ より

$$f'(x)=\frac{1\cdot x(1-tx)-(x+t)(1-2tx)}{x^2(1-tx)^2}=\frac{t(x^2+2tx-1)}{x^2(1-tx)^2}$$

$g(x)=x^2+2tx-1$ とおくと

$$g(0)=-1<0,\quad g\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}+1>0$$

2 次方程式 $g(x)=0$ は，$0,\ \dfrac{1}{t}$ でない異なる 2 つの実数解をもつ．
これらの解を $x_1,\ x_2$ とすると $(x_1<x_2)$

$$f'(x)=\frac{t(x-x_1)(x-x_2)}{x^2(1-tx)^2}\qquad\left(x_1<0<x_2<\frac{1}{t}\right)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	x_1	$\cdots$	(0)	$\cdots$	x_2	$\cdots$	$(\frac{1}{t})$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$

よって，$f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつ．

(2) (1) の結果から，$\alpha=x_1$，$\beta=x_2$ である．
$g(\alpha)=\alpha^2+2t\alpha-1=0$ であるから，$1-t\alpha=\alpha(\alpha+t)$ より

$$f(\alpha)=\frac{\alpha+t}{\alpha(1-t\alpha)}=\frac{\alpha+t}{\alpha\cdot\alpha(\alpha+t)}=\frac{1}{\alpha^2}\quad\text{同様に}\quad f(\beta)=\frac{1}{\beta^2}$$

2 次方程式 $g(x)=0$ の解が $\alpha,\ \beta$ であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-2t,\quad \alpha\beta=-1\quad\cdots(*)$$

$\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{Q}(\beta,\ f(\beta))$ の中点 M の座標を $(x,\ y)$ とすると，$(*)$ により

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{-2t}{2}=-t,$$
$$y=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2(\alpha\beta)^2}=2t^2+1$$

$0<t<1$ に注意して，上の 2 式から t を消去すると

放物線 $\boldsymbol{y=2x^2+1\quad(-1<x<0)}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 求めるBの得点がmである確率をq_mとする．

(i) $m \leqq 2$のとき，Bは1回目に1または2の番号札，2回目にmの番号札を取り出すから，その確率は

$$q_m = \frac{2}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2}$$

(ii) $m > 2$のとき，Bは1回目にmの番号札を取り出すか，1回目に1または2の番号札，2回目にmの番号札を取り出す確率であるから

$$q_m = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{n+2}{n^2}$$

(i),(ii)より，求める確率は $\boldsymbol{q_m = \begin{cases} \dfrac{2}{n^2} & (m = 1,\ 2) \\ \dfrac{n+2}{n^2} & (m = 3, 4, \cdots, n) \end{cases}}$

(2) Aの得点がmより小さい確率は $\dfrac{m-1}{n}$

したがって，求める確率p_nは

$$\begin{aligned} p_n &= \sum_{m=2}^{n} \frac{m-1}{n} q_m = \frac{2-1}{n} q_2 + \sum_{m=3}^{n} \frac{m-1}{n} q_m \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{2}{n^2} + \sum_{m=3}^{n} \frac{m-1}{n} \times \frac{n+2}{n^2} \\ &= \frac{2}{n^3} + \frac{n+2}{n^3} \sum_{m=3}^{n} (m-1) \\ &= \frac{2}{n^3} + \frac{n+2}{n^3} \times \frac{1}{2}(n-2)\{2 + (n-1)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{n^2+n-4}{2n^2}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f_{n+1}(x) = 2\cos x + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\sin(x-t)\,dt$ および

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\sin t\,dt, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\cos t\,dt$$

により

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= 2\cos x + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\sin(x-t)\,dt \\ &= 2\cos x + \frac{2\sin x}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\cos t\,dt - \frac{2\cos x}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\sin t\,dt \\ &= b_n\sin x + (2-a_n)\cos x \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

ここで，次の 3 式を計算する．

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt &= \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = \left[\,\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t\,\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\pi}\cos^2 t\,dt &= \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = \left[\,\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\,\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\pi}\sin t\cos t\,dt &= \int_0^{\pi}\sin t(\sin t)'\,dt = \left[\,\frac{1}{2}\sin^2 t\,\right]_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_{n+1}(t)\sin t\,dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\{b_n\sin t + (2-a_n)\cos t\}\sin t\,dt \\ &= \frac{2b_n}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt + \frac{2(2-a_n)}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos t\,dt \\ &= \frac{2b_n}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{2(2-a_n)}{\pi}\cdot 0 = \boldsymbol{b_n}, \\ b_{n+1} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_{n+1}(t)\cos t\,dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\{b_n\sin t + (2-a_n)\cos t\}\cos t\,dt \\ &= \frac{2b_n}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos t\,dt + \frac{2(2-a_n)}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 t\,dt \\ &= \frac{2b_n}{\pi}\cdot 0 + \frac{2(2-a_n)}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{2-a_n} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　$a_{n+2}=b_{n+1}$，　$b_{n+1}=2-a_n$

上の 2 式から　$a_{n+2}=2-a_n$　ゆえに　$a_{n+2}-1=-(a_n-1)$

$c_n=a_n-1$ より　$c_{n+2}=-c_n$

$c_1=a_1-1,\ c_2=a_2-1=b_1-1$ であるから

n が奇数のとき　$c_n=c_1{\cdot}(-1)^{\frac{n-1}{2}}=(a_1-1){\cdot}(-1)^{\frac{n-1}{2}}$

n が偶数のとき　$c_n=c_2{\cdot}(-1)^{\frac{n-2}{2}}=(b_1-1){\cdot}(-1)^{\frac{n-2}{2}}$

よって　$$\boldsymbol{c_n=\begin{cases}(a_1-1){\cdot}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & (n\text{ が奇数})\\(b_1-1){\cdot}(-1)^{\frac{n-2}{2}} & (n\text{ が偶数})\end{cases}}$$

(3) a_n，b_n が n によらない定数となるとき，(2) の結果から

$$a_1=b_1=1\quad\text{すなわち}\quad a_n=b_n=1$$

このとき，(∗) より，$f_{n+1}(x)=\sin x+\cos x$ は n に因らないから

$$\boldsymbol{f(x)=\sin x+\cos x}$$

別解　$f(x)=px+q$ とし，$\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt=\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt=\frac{\pi}{2}$ を満たす p，q を求める．

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (pt+q)\sin t\,dt&=\Big[-(pt+q)\cos t+p\sin t\Big]_0^\pi\\&=p\pi+2q=\frac{\pi}{2},\\\int_0^\pi (pt+q)\cos t\,dt&=\Big[(pt+q)\sin+p\cos t\Big]_0^\pi\\&=-2p=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

上の 2 式から　$p=-\dfrac{\pi}{4},\ q=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi^2}{8}$　よって　$f(x)=-\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi^2}{8}$