平成 30 年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

1 座標空間の 4 点 $\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$，$\mathrm{D}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$ に対し，

$$\vec{p} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \vec{q} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

とおく．ただし，O は原点，s と t は実数とする．

(1) $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$ と内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を s，t で表せ．

(2) $t = \frac{1}{2}$ のとき，ベクトル $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\frac{3}{4}\pi$ となるような s の値を求めよ．

(3) s と t が実数を動くとき，$|\vec{p} - \vec{q}|$ の最小値を求めよ．

2 $z + \frac{4}{z}$ が実数となるような 0 と異なる複素数 z の全体を D とする．

(1) D を複素数平面上に図示せよ．

(2) k を実数とする．D に属する z で方程式

$$k\left(z + \frac{4}{z} + 8\right) = i\left(z - \frac{4}{z}\right)$$

を満たすものが存在するような k の値の範囲を求めよ．ただし，i は虚数単位を表す．

3 数字の 2 が書かれたカードが 2 枚，同様に，数字の 0，1，8 が書かれたカードがそれぞれ 2 枚，あわせて 8 枚のカードがある．これらから 4 枚を取り出し，横一列に並べてできる自然数を n とする．ただし，0 のカードが左から 1 枚または 2 枚現れる場合は，n は 3 桁または 2 桁の自然数とそれぞれ考える．例えば，左から順に 0，0，1，1 の数字のカードが並ぶ場合の n は 11 である．

(1) a，b，c，d は整数とする．$1000a + 100b + 10c + d$ が 9 の倍数になることと $a + b + c + d$ が 9 の倍数になることは同値であることを示せ．

(2) n が 9 の倍数である確率を求めよ．

(3) n が偶数であったとき，n が 9 の倍数である確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$\left(\dfrac{15}{2},\ 0\right)$，B$(11,\ 11)$ がある．条件

$$\mathrm{BQ} \geqq \mathrm{OQ} \geqq 2\mathrm{AQ}$$

を満たす点 Q$(x,\ y)$ 全体を D とする．

(1) D を座標平面上に図示せよ．また，$\mathrm{BQ} = \mathrm{OQ} = 2\mathrm{AQ}$ となるすべての点 Q の座標を求めよ．

(2) $0 < p \leqq 11$ とし，P を点 $(p,\ 11)$ とする．条件 $\mathrm{OQ} \geqq \mathrm{PQ}$ を満たす D の点 Q が存在するような p の値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 2 つの関数

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} - \frac{\pi}{2}$$

がある．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x$ が成り立つことを示せ．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $g(x) \leqq f(x)$ が成り立つことを示せ．

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ および y 軸が囲む部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 4点 $\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$，$\mathrm{D}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$

に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\quad |\vec{c}|=|\vec{d}|=\sqrt{2},\\
&\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=0,\quad \vec{a}\cdot\vec{d}=0,\\
&\vec{b}\cdot\vec{c}=-1,\quad \vec{b}\cdot\vec{d}=-1,\quad \vec{c}\cdot\vec{d}=0
\end{aligned}$$

$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$，$\vec{q}=(1-s)\vec{c}+s\vec{d}$ より，上の結果に注意して

$$\begin{aligned}
|\vec{p}|^2 &= |(1-t)\vec{a}+t\vec{b}|^2=(1-t)^2|\vec{a}|^2+2(1-t)t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2\\
&=(1-t)^2+t^2=2t^2-2t+1,\\
|\vec{q}|^2 &= |(1-s)\vec{c}+s\vec{d}|^2=(1-s)^2|\vec{c}|^2+2(1-s)s\vec{c}\cdot\vec{d}+s^2|\vec{d}|^2\\
&=2(1-s)^2+2s^2=2(2s^2-2s+1)
\end{aligned}$$

したがって　$\boldsymbol{|\vec{p}|=\sqrt{2t^2-2t+1}}$，$\boldsymbol{|\vec{q}|=\sqrt{2(2s^2-2s+1)}}$

また　
$$\begin{aligned}
\vec{p}\cdot\vec{q}&=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot\{(1-s)\vec{c}+s\vec{d}\}\\
&=(1-s)(1-t)\vec{a}\cdot\vec{c}+s(1-t)\vec{a}\cdot\vec{d}+(1-s)t\vec{b}\cdot\vec{c}+st\vec{b}\cdot\vec{d}\\
&=(1-s)t\cdot(-1)+st\cdot(-1)=\boldsymbol{-t}
\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，$t=\frac{1}{2}$ のとき　$|\vec{p}|=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\vec{p}\cdot\vec{q}=-\frac{1}{2}$

このとき，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\frac{3}{4}\pi$ であるから

$$\cos\frac{3}{4}\pi=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}\quad \text{ゆえに}\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}|\vec{q}|}\quad \text{すなわち}\quad |\vec{q}|=1$$

これを (1) の結果に代入すると　$\sqrt{2(2s^2-2s+1)}=1$

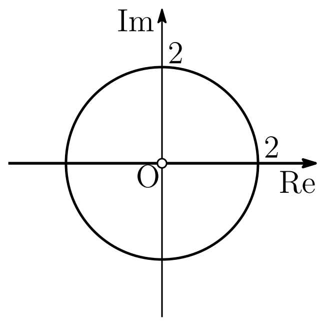
したがって　$(2s-1)^2=0$　これを解いて　$\boldsymbol{s=\frac{1}{2}}$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
|\vec{p}-\vec{q}|^2&=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2\\
&=(2t^2-2t+1)-2(-t)+2(2s^2-2s+1)\\
&=(2s-1)^2+2t^2+2\geqq 2
\end{aligned}$$

よって，$|\vec{p}-\vec{q}|$ の最小値は　$\boldsymbol{\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $z+\dfrac{4}{z}$ が，実数であるから　$z+\dfrac{4}{z}=\overline{z+\dfrac{4}{z}}$



したがって　　$z+\dfrac{4}{z}=\overline{z}+\dfrac{4}{\overline{z}}$

ゆえに　　$(z-\overline{z})\left(1-\dfrac{4}{|z|^2}\right)=0$

すなわち　　$z=\overline{z}$　または　$|z|=2$

よって，D の表す図形は，実軸上 (原点を除く)

または　原点を中心とする半径 2 の円

(2) 与えれた方程式から

$$k\left(z+\frac{4}{z}+8\right)+i\left(\frac{4}{z}-z\right)=0 \quad \cdots(*)$$

(i) z が実軸上にあるとき，$k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)$，$\dfrac{4}{z}-z$ は実数であるから

$$k\left(z+\frac{4}{z}+8\right)=0,\quad \frac{4}{z}-z=0$$

上の第 2 式から，$z=\pm2$．これを第 1 式に代入することにより

$$k=0$$

(ii) z が $|z|=2$ を満たす円周上で -2 を除く点であるとき

$$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(-\pi<\theta<\pi)$$

とおいて，$(*)$ に代入すると

$$k(4\cos\theta+8)+i(-4i\sin\theta)=0 \quad \text{ゆえに} \quad k(\cos\theta+2)+\sin\theta=0$$

$t=\tan\dfrac{\theta}{2}(-\infty<t<\infty)$，$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ とすると

$$k\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\right)+\frac{2t}{1+t^2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad kt^2+2t+3k=0 \quad \cdots(**)$$

$k\neq0$ のとき，上の t に関する 2 次方程式 $(**)$ は実数解をもつから

$$D/4=1-3k^2\geqq0 \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}$$

特に，$k=0$ のときも方程式 $(**)$ は実数解をもつ．

(i)，(ii) より，求める k の値の範囲は　　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $$1000a+100b+10c+d=9(111a+11b+c)+a+b+c+d$$

上式より，$1000a+100b+10c+d$ が 9 の倍数であることと $a+b+c+d$ が 9 の倍数であることは同値である．

別解 $10\equiv 1 \pmod 9$ より，$10^2\equiv 1,\ 10^3\equiv 1 \pmod 9$ であるから

$$\begin{aligned}1000a+100b+10c+d&=10^3a+10^2b+10c+d\\&\equiv a+b+c+d \pmod 9\end{aligned}$$

(2) 8 枚のカードをすべて区別する．異なる 8 枚のカードから 4 枚を取り出し，一列に並べる方法は

$${}_8\mathrm{P}_4\ (\text{通り})$$

このとき，取り出した 4 枚の数字の和が 9 の倍数となる組合せは

(a) $\{0,\ 0,\ 1,\ 8\}$　　(b) $\{0,\ 2,\ 8,\ 8\}$　　(c) $\{1,\ 1,\ 8,\ 8\}$

(a) の $1,\ 8$ の選び方は 2^2 通り，(b) の $0,\ 2$ の選び方は 2^2 通り．(a)〜(c) の並べ方は，それぞれ $4!$ 通りあるから，n が 9 の倍数となる事象を A とすると，その総数は

$$2^2{\cdot}4!+2^2{\cdot}4!+4!=9{\cdot}4!\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は　$P(A)=\dfrac{9{\cdot}4!}{{}_8\mathrm{P}_4}=\dfrac{9\times 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1}{8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5}=\boldsymbol{\dfrac{9}{70}}$

(3) n が奇数であるのは，一位の数が 1 であるから，その場合の数は

$$2\times{}_7\mathrm{P}_3\ (\text{通り})$$

n が偶数となる事象を B とすると，その確率は

$$P(B)=1-\frac{2\times{}_7\mathrm{P}_3}{{}_8\mathrm{P}_4}=\frac{8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5-2\times 7{\cdot}6{\cdot}5}{{}_8\mathrm{P}_4}=\frac{6{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5}{{}_8\mathrm{P}_4}$$

n が 9 の倍数で奇数 $A\cap\overline{B}$ となるのは，一位の数が 1 であるから，その場合の数は (a) のときの $2^2{\cdot}3!$ 通りと (c) のときの $2{\cdot}3!$ 通り．n が 9 の倍数で偶数となる，すなわち，$A\cap B$ となる確率は

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)-P(A\cap\overline{B})\\&=\frac{9{\cdot}4!}{{}_8\mathrm{P}_4}-\frac{2^2{\cdot}3!+2{\cdot}3!}{{}_8\mathrm{P}_4}=\frac{30{\cdot}3!}{{}_8\mathrm{P}_4}\end{aligned}$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{30{\cdot}3!}{{}_8\mathrm{P}_4}{\cdot}\frac{{}_8\mathrm{P}_4}{6{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5}=\boldsymbol{\frac{1}{7}}$$

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(\dfrac{15}{2},\ 0\right)$．$\mathrm{B}(11,\ 11)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$

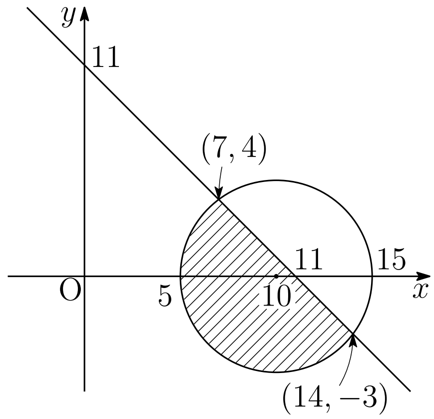
$\mathrm{BQ} \geqq \mathrm{OQ} \geqq 2\mathrm{AQ}$ より，$\mathrm{BQ}^2 \geqq \mathrm{OQ}^2 \geqq 4\mathrm{AQ}^2$ であるから

$$(x-11)^2+(y-11)^2 \geqq x^2+y^2 \geqq (2x-15)^2+4y^2$$

整理すると　$x+y \leqq 11,\quad (x-10)^2+y^2 \leqq 25$

よって，求める領域 D は下の図の斜線部分で，境界線を含む．

$\mathrm{BQ}=\mathrm{OQ}=2\mathrm{AQ}$ が成立するとき



$$(*)\begin{cases} x+y=11 \\ (x-10)^2+y^2=25 \end{cases}$$

第 1 式から　$x-10=1-y$

これを第 2 式に代入して

$$(1-y)^2+y^2=25$$

ゆえに　$(y-4)(y+3)=0$

これを解いて　$y=4,-3$　$(*)$ の第 1 式により　$\mathbf{(7,\ 4),\ (14,-3)}$

(2) $0<p \leqq 11$，$\mathrm{P}(p,\ 11)$，$\mathrm{OQ} \geqq \mathrm{PQ}$ より，$\mathrm{OQ}^2 \geqq \mathrm{PQ}^2$ であるから

$$x^2+y^2 \geqq (x-p)^2+(y-11)^2 \quad \text{ゆえに} \quad y \geqq -\frac{p}{11}x+\frac{p^2}{22}+\frac{11}{2} \quad \cdots(**)$$

領域 $(**)$ は傾き $-\dfrac{p}{11}$ $\left(-1 \leqq -\dfrac{p}{11} < 0\right)$ の直線の上側である．$(**)$ で D を満たす点が存在するとき，点 $(7,\ 4)$ が $(**)$ を満たせばよいから

$$4 \geqq -\frac{p}{11}\cdot 7+\frac{p^2}{22}+\frac{11}{2} \quad \text{整理すると} \quad (p-3)(p-11) \leqq 0$$

よって，p の値の範囲に注意して　$\mathbf{3 \leqq \boldsymbol{p} \leqq 11}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $h(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$ とすると　$h'(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}$

$h'(x)$ は，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，単調減少．

$$h'(0)=1-\frac{2}{\pi}>0,\quad h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}<0$$

ゆえに，$h'(c)=0$ を満たす c $\left(0<c<\dfrac{\pi}{2}\right)$ が唯一存在する．

したがって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $h(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

よって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において　$h(x) \geqq 0$　すなわち　$\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x$

解説 $\alpha<x<\beta$ において，$f''(x)<0$ とする．

$$h(x)=f(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)-f(\alpha)$$

とおくと　$h'(x)=f'(x)-\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

$h'(x)$ は単調減少，$h(\alpha)=0$，$h(\beta)=0$ であるから，ロルの定理により，$h'(c)=0$ を満たす c $(\alpha<x<\beta)$ が唯一存在する．

x	α	$\cdots$	c	$\cdots$	β
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

したがって　$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において　$h(x) \geqq 0$

よって　$f(x) \geqq \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+f(\alpha)\qquad(\alpha \leqq x \leqq \beta)$

直線 $y=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+f(\alpha)$ は，曲線 $y=f(x)$ 上の2点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ を通る直線．曲線 $y=f(x)$ は，$\alpha<x<\beta$ において上に凸であるから，曲線 $y=f(x)$ は直線 AB の上側にある．

また，$\alpha<x<\beta$ において，$f''(x)>0$ のとき

$$f(x) \leqq \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+f(\alpha)\qquad(\alpha \leqq x \leqq \beta)$$

(2) $\lambda(x)=f(x)-g(x)=\cos x-\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2}-x^2}+\dfrac{\pi}{2}$ とおくと

$$\lambda'(x)=-\sin x+\frac{x}{\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2}-x^2}}$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $\quad \dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2}-x^2}}\leqq\dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2}}=\dfrac{2}{\pi}x$

上の 2 式から，(1) の結果に注意して

$$\lambda'(x)\leqq-\sin x+\frac{2}{\pi}x=-\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)\leqq 0$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$\lambda(x)$ は単調減少で，$\lambda\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ であるから

$$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\text{において}\quad \lambda(x)\geqq 0\quad\text{すなわち}\quad g(x)\leqq f(x)$$

(3) (2) の結果から，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\lambda(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\frac{\pi}{2}\right)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}\,dx\quad\cdots(*)$$

ここで $\quad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\frac{\pi}{2}\right)dx=\Big[\ \sin x+\frac{\pi}{2}x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1+\frac{\pi^2}{4}\quad\cdots①$

次式において，$x=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\sin\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\theta$

x	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}\,dx&=\frac{\pi^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta\\&=\frac{\pi^2}{4}\Big[\ \theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\quad\cdots②\end{aligned}$$

①，② を $(*)$ に代入すると

$$S=1+\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{1+\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^3}{16}}$$